https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7

Capítulo 5

https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7.ch05

Método de Romberg

5.1. Fundamentos Teóricos

La integración de Romberg es una de las técnicas más eficaces para aproximar integrales definidas ya que combina la regla del trapecio con la extrapolación de Richardson haciendo que la convergencia sea más rápida.

La idea fundamental consiste en aplicar el método del trapecio con distintos tamaños de paso Δx, y luego combinar esos resultados usando fórmulas que eliminan progresivamente los términos de error, generando así mejores aproximaciones de la integral.

5.2. Extrapolación de Richardson

Como se sabe, el error en la regla del trapecio es directamente proporcional a h^2 y viene dada por la expresión:

$$E(h) = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

Cambiar esto

Lo que indica que al usar pesos cada vez más pequeños ($h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8}$), se obtienen aproximaciones con errores cada vez menores. Pero en vez de seguir reduciendo estos pasos, la integración de Romberg utiliza la extrapolación de Richardson para eliminar el término dominante del error. Dicha fórmula viene dada por la expresión:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}$$

5.3. Formulación y Tabla Triangular

Para cada aproximación de la regla del trapecio compuesta con paso h, se tiene que:

$$R_{k,0} = I + Ch_k^2 + Dh_k^4 + O(_k^6)$$

donde:

- I es el valor de la integral exacta.
- CyD son constantes desconocidas.
- $h_k = \frac{b-a}{2^k}$

de aquí que para:

- $k = 0 \rightarrow h_0 = b - a$
- $k = 1 \rightarrow h_1 = \frac{b-a}{2}$
- $k = 2 \rightarrow h_2 = \frac{b-a}{4}$
- $k = 3 \rightarrow h_3 = \frac{b-a}{8}$

Sí lo que se quiere es cancelar el término Ch_k^2, tomamos para ellos dos aproximaciones:

$$A = R_{k,0} = I + Ch_k^2 + Dh_k^4 + \cdots$$

$$B = R_{k-1,0} = I + C(2h_k)^2 + D(2h_k)^4 + \cdots$$

Como se observa $(2h_k)^2 = 4h_k^2$ Entonces:

$$B = I + 4Ch_k^2 + 16Dh_k^4 + \cdots$$

Buscamos la combinación lineal de la forma:

$$R = \alpha A - \beta B$$

Se quiere que:

R=I+"(términos de orden superior)"

es decir:

$$\alpha\, Ch_k^2 - \beta(4Ch_k^2) = 0$$

Lo que da la relación:

$$\alpha - 4\beta = 0 \rightarrow \alpha = 4\beta$$

Ponderando de forma que el coeficiente de I sea α-β=3, dividimos entre 3 y obtenemos:

$$R = \frac{4A - B}{3} \quad \text{(Primer nivel de extrapolación ó } R_{k,j}\text{)}$$

En general, para cualquier nivel j, tenemos que:

$$R_{k,j-1} = I + C_j h_k^{2^j}$$

Sí duplicamos el paso $h_k \rightarrow 2h_k$, el error se duplica, es decir 2^{2j}, obteniendo:

$$R_{k-1,j-1} = I + C_j (2h_k)^{2^j} + \cdots$$

Resolviendo, se obtiene:

$$R_{k-1,j-1} = I + C_j 2^{2j} h_k^{2^j} + \cdots$$

Para el término $C_j h_k^{2j}$, combinamos para obtener:

$$R_{k,j} = \frac{2^{2^j} R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{2^{2^j} - 1}$$

Como $2^{2j} = 4^j$, nos queda:

$$R_{k,j} = \frac{4^j R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}$$

o bien

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}$$

Interpretación paso a paso del Método de Romberg

Primera columna (j=1)

Estas son las aproximaciones obtenidas aplicando la regla del trapecio compuesta con diferentes números de subintervalos:

$$R_{1,1} = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$
$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h \cdot f\left(a + \frac{h}{2}\right)\right]$$
$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{h}{2} \cdot \left(f\left(a + \frac{h}{4}\right) + f\left(a + \frac{3h}{4}\right)\right)\right]$$
$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[R_{3,1} + \frac{h}{4} \cdot \left(f\left(a + \frac{h}{8}\right) + f\left(a + \frac{3h}{8}\right) + f\left(a + \frac{5h}{8}\right) + f\left(a + \frac{7h}{8}\right)\right)\right]$$

Segunda columna (j=2) Primera extrapolación de Richardson:

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}$$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{R_{2,1} - R_{1,1}}{3}$$
$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{R_{3,1} - R_{2,1}}{3}$$
$$R_{4,2} = R_{4,1} + \frac{R_{4,1} - R_{3,1}}{3}$$

Tercera columna (j=3) Segunda extrapolación de Richardson:

$$R_{k,3} = R_{k,2} + \frac{R_{k,2} - R_{k-1,2}}{15}$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{R_{3,2} - R_{2,2}}{15}$$

$$R_{4,3} = R_{4,2} + \frac{R_{4,2} - R_{3,2}}{15}$$

Cuarta columna (j=4) Tercera extrapolación de Richardson:

$$R_{4,4} = R_{4,3} + \frac{R_{4,3} - R_{3,3}}{63}$$

Resumen en forma de tabla triangular

Tabla 30

Tabla triangular de $R_{k,j}$

k	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
1	$R_{1,1}$			
2	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$		
3	$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$	
4	$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$

5.4. Error de Truncamiento

Para calcular el error en la integración de Romberg no se conoce una fórmula cerrada simple que genere el error exacto, tal como sucede con la regla del trapecio o los métodos de Simpson, cuyas expresiones dependen de derivadas en un punto intermedio o del valor máximo de la derivada en el intervalo [a,b].

Lo anterior se debe a que en la integración de Romberg ocurre:

- Cada paso de extrapolación cancela los términos dominantes del error (Burden, 2011).
- El error residual depende de derivadas de orden más alto y constantes que no se conocen explícitamente.

Lo que sí se puede es estimar el error comparando dos niveles sucesivos de extrapolación. Así:

$$E_e \approx |R_{k,j} - R_{k-1,j-1}|$$

Fórmula que indica cuánto ha cambiado la aproximación al aumentar el refinamiento y la extrapolación.

5.5. Ventajas

- Permite obtener resultados de alta precisión en la integración numérica mediante la extrapolación sucesiva.
- El método reduce considerablemente el error en cada nivel, pasando de orden $O(h^2)$ a $O(h^4), O(h^6)$, etc.
- Utiliza de forma eficiente las aproximaciones previas del método del trapecio, evitando cálculos repetitivos.
- Es adecuado para funciones continuas y suaves, y puede ser muy efectivo incluso con pocas subdivisiones.

5.6 Desventajas

- Requiere cálculos adicionales para cada nivel de extrapolación, lo que aumenta la complejidad respecto a métodos básicos.
- No es eficiente si la función presenta discontinuidades, cambios bruscos o irregularidades.

- Puede volverse inestable o inútil si no se respetan correctamente los refinamientos de los subintervalos.
- Si se aplica de forma innecesaria en problemas simples, puede implicar un gasto computacional mayor sin justificación.

5.7. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_{1}^{2} (x^3 + x - 1)\, dx$$

- Resuelva la integral de forma analítica.
- Aproxime el valor de la integral utilizando el método de Romberg hasta un nivel de refinamiento 3, es decir, calcule el valor de $R_{4,4}$.
- Estime el error aproximado entre niveles sucesivos, utilizando la fórmula:

$$E_e \approx |R_{k,j} - R_{k-1,j-1}|$$

Para esto, calcule:

- El error entre $R_{4,4}$ y su anterior $R_{3,3}$.
- El error entre $R_{3,3}$ y su anterior $R_{2,2}$.

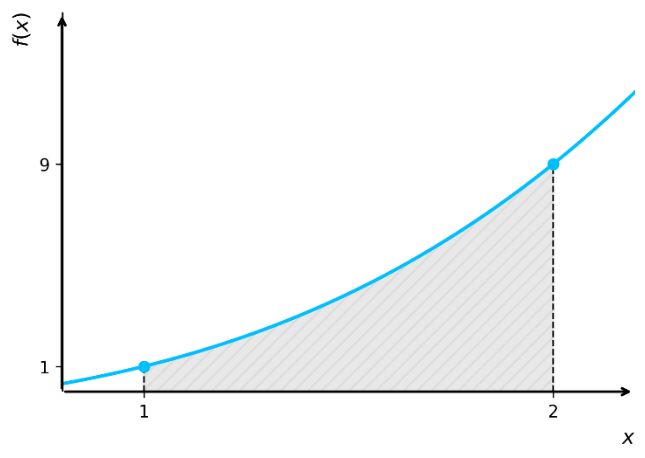
Utilice un redondeo de 4 decimales.

Analice los resultados obtenidos: ¿El error entre niveles sucesivos fue alto o bajo? ¿Qué comportamiento observa al aumentar progresivamente el número de subintervalos? Explique su respuesta a partir de la teoría del método de Romberg, teniendo en cuenta el propósito de la extrapolación para mejorar la precisión de la aproximación.

Solución Analítica

Figura 16

Área bajo la curva de $f(x) = x^3 + x - 1$



$$\int_1^2 (x^3 + x - 1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^2$$

$$\int_1^2 (x^3 + x - 1)\,dx = \left[\frac{1}{4}(2)^4 + \frac{1}{2}(2)^2 - (2)\right] - \left[\frac{1}{4}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2 - (1)\right] = 4 - (-\frac{1}{4})$$

$$\int_1^2 (x^3 + x - 1)\,dx = 4.25$$

Nivel de Refinamiento n=3

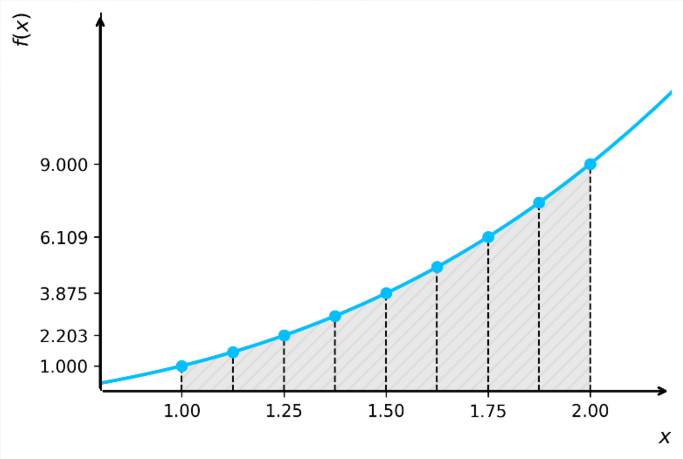
Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x) = x^3 + x - 1$
- Límite inferior: a=1
- Límite superior: b=2
- Número de decimales: 6

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo.

Figura 17

Área bajo la curva de $f(x) = x^3 + x - 1$



$$\Delta x = \frac{b-a}{8} = \frac{2-1}{8} = 0.1250$$

Tabla 31

Valores de $f(x) = x^3 + x - 1$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.000000	1.000000
1	1.125000	1.548828
2	1.250000	2.203125
3	1.375000	2.974609
4	1.500000	3.875000
5	1.625000	4.916016
6	1.750000	6.109375
7	1.875000	7.466797
8	2.000000	9.000000

$$h = b - a = 2 - 1 = 1$$

$$R_{1,1} = \frac{1}{2}[9.000000 + 1.000000] = 5.000000$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}[5.000000 + (1) \cdot 3.875000] = 4.437500$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[4.437500 + \frac{1}{2} \cdot [2.203125 + 6.109375]\right] = 4.296875$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[4.296875 + \frac{1}{4} \cdot [1.548828 + 2.974609 + 4.916016 + 7.466797]\right] = 4.261719$$

$$R_{2,2} = 4.437500 + \frac{4.437500 - 5.00000}{3} = 4.250000$$

$$R_{3,2} = 4.296875 + \frac{4.296875 - 4.437500}{3} = 4.250000$$

$$R_{4,2} = 4.261719 + \frac{4.261719 - 4.296875}{3} = 4.250000$$

$$R_{3,3} = 4.2500 + \frac{4.2500 - 4.2500}{15} = 4.2500$$

$$R_{4,3} = 4.2500 + \frac{4.2500 - 4.2500}{15} = 4.2500$$

$$R_{4,4} = 4.2500 + \frac{4.2500 - 4.2500}{63} = 4.2500$$

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproxime el valor de la siguiente integral utilizando el método de Romberg hasta obtener $R_{4,4}$. Redondee todos los resultados intermedios y finales a 6 decimales

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

Figura 18:

Área bajo la curva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

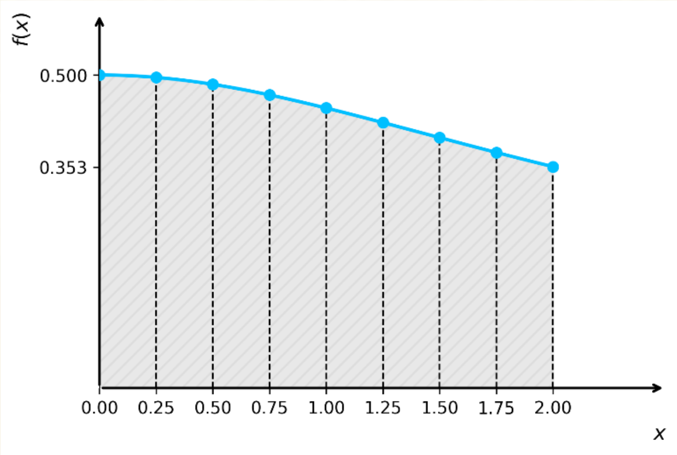


Tabla 31

Valores de : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.0000	0.5000
1	0.2500	0.4961
2	0.5000	0.4851
3	0.7500	0.4682
4	1.0000	0.4472
5	1.2500	0.4240
6	1.5000	0.4000
7	1.7500	0.3763
8	2.0000	0.3536

$$h = b - a = 2 - 0 = 2$$

$$R_{1,1} = \frac{2}{2}[0.5000 + 0.3536] = 0.8536$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}[0.8536 + (2) \cdot 0.4472] = 0.8740$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[0.8740 + \frac{2}{2} \cdot [0.4851 + 0.4000]\right] = 0.8796$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[0.8796 + \frac{2}{4} \cdot [0.4961 + 0.4682 + 0.4240 + 0.3763]\right] = 0.8810$$

$$R_{2,2} = 0.8740 + \frac{0.8740 - 0.8536}{3} = 0.8808$$

$$R_{3,2} = 0.8796 + \frac{0.8796 - 0.8740}{3} = 0.8815$$

$$R_{4,2} = 0.8810 + \frac{0.8810 - 0.8796}{3} = 0.8815$$

$$R_{3,3} = 0.8815 + \frac{0.8815 - 0.8808}{15} = 0.8815$$

$$R_{4,3} = 0.8815 + \frac{0.8815 - 0.8815}{15} = 0.8815$$

$$R_{4,4} = 0.8815 + \frac{0.8815 - 0.8815}{15} = 0.8815$$

Ejemplo 3

Evaluación energética de un servidor y selección óptima de sistema de refrigeración

Contextualización del problema

Los centros de datos modernos albergan servidores de alto rendimiento que operan de forma continua procesando grandes volúmenes de información. Estos equipos, al realizar operaciones complejas y simultáneas, generan una cantidad considerable de energía térmica que debe ser gestionada eficazmente para evitar sobrecalentamientos, fallos del sistema y reducción de la vida útil de los componentes electrónicos.

Para garantizar la estabilidad del sistema y evitar interrupciones en los servicios, se hace necesario implementar un sistema de refrigeración capaz de disipar eficientemente el calor generado.

Descripción y modelamiento del problema

En el centro de datos de la Universidad Popular del Cesar, se están evaluando las condiciones térmicas del servidor principal que opera con tráfico intenso en ciertas horas del día. Para garantizar su correcto funcionamiento, se requiere conocer cuánta energía se convierte en calor durante una jornada de 10 minutos de máxima carga, con el fin de determinar el sistema de refrigeración más adecuado.

El equipo de ingenieros encargados de esta tarea debe seleccionar entre dos opciones, teniendo en cuenta factores como la capacidad de extracción de calor, los costos y la temperatura ambiente.

Sistema A: Ventilación por aire forzada

- Capacidad máxima de extracción térmica: 86.000J cada 10 min
- Costo de instalación: 1.300.000 COP
- Mantenimiento semestral: 650.000 COP
- Desempeño disminuye un 20% si la temperatura ambiente supera los 30°C

Sistema B: Refrigeración líquida

- Capacidad máxima de extracción térmica: 100.000J cada 10 min
- Costo de instalación: 3.850.000 COP
- Mantenimiento semestral: 1.000.000 COP
- Funciona con eficiencia constante sin importar la temperatura ambiente

La potencia que consume el servidor (en watts) está modelada por la función:

$$P(t) = 180 + 40t \cdot e^{-0.3t} + 25\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$$

donde t es el tiempo en minutos.

La energía total consumida en Julios en ese intervalo está dada por:

$$Q_{\text{total}} = 60\int_0^{10} P\,(t)\,dt$$

El 65% de la energía total ($Q_t otal$) se convierte en calor que debe ser extraído por el sistema de refrigeración:

$$Q_{\text{calor}} = 0.65 \cdot Q_{\text{total}}$$

Pregunta problema

1. ¿Cuál es la energía calórica generada por el servidor durante los 10 minutos?
2. ¿Cuál sería la capacidad real del sistema A si se considera el efecto del clima?
3. ¿Qué sistema de refrigeración es más adecuado técnicamente y calcule su costo de instalación y mantenimiento para un año?

Requisitos o condiciones del problema

- Resolver la integral utilizando el método de Romberg para n=8 subintervalos.
- Presentar los resultados utilizando un redondeo con 4 cifras decimales.
- Justificar la elección del sistema con base en los tres criterios.

Paso 1: Información del problema

https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7

- Función: $P(t) = 180 + 40t \cdot e^{-0.3t} + 25\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$
- Límite inferior: a=0
- Límite superior: b=10
- Número de subintervalos: n=8
- Número de decimales: 4
- Temperatura ambiente promedio de Valledupar es de 32°C

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{8} = 1.250$$

Tabla 32

Valores de $P(t) = 180 + 40t \cdot e^{-0.3t} + 25cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$

i	t_i	$P(t_i)$
0	0.0000	205.0000
1	1.2500	232.0421
2	2.5000	227.2367
3	3.7500	211.0202
4	5.0000	199.6260
5	6.2500	200.6611
6	7.5000	211.6198
7	8.7500	223.0316
8	10.0000	224.9148

$$h = b - a = 10 - 0 = 10$$

$$R_{1,1} = \frac{10}{2}[205.00 + 224.9148] = 2149.5740$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}[2149.5740 + (10) \cdot 199.6260] = 2072.9170$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[2072.9170 + \frac{10}{2} \cdot [227.2367 + 211.6198]\right] = 2133.7248$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[2133.7248 + \frac{10}{4} \cdot [232.0421 + 211.0202 + 200.6611 + 223.0316]\right]$$
$$= 2150.2435$$

$$R_{2,2} = 2072.9170 + \frac{2072.9170 - 2149.5740}{3} = 2047.3647$$

$$R_{3,2} = 2133.7248 + \frac{2133.7248 - 2072.9170}{3} = 2153.9940$$

$$R_{4,2} = 2150.2435 + \frac{2150.2435 - 2133.7248}{3} = 2155.7497$$

$$R_{3,3} = 2153.9940 + \frac{2153.9940 - 2047.3647}{15} = 2161.1026$$

$$R_{4,3} = 2155.7497 + \frac{2155.7497 - 2153.9940}{15} = 2155.8668$$

$$R_{4,4} = 2155.8668 + \frac{2155.8668 - 2161.1026}{63} = 2155.7837$$

Es decir:

$$\int_0^{10} P\,(t)\,dt = \int_0^{10} \left(180 + 40t \cdot e^{-0.3t} + 25\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right) dt = 2155.7837 \text{ W} \cdot \text{min}$$

La energía total es:

$$Q_{\text{total}} = 60 \int_0^{10} P\,(t)\,dt = (60) \cdot (2155.7837 \text{ W} \cdot \text{min}) = 129347.0220 \text{ J}$$

La energía calórica del sistema es:

$$Q_{\text{calor}} = 0.65 \cdot Q_{\text{total}} = (0.65) \cdot (129347.0220 \text{ J}) = 84075.5643 \text{ J}$$

Análisis y conclusiones de los resultados

- Inicialmente se calculó la integral de la potencia mediante el método de Romberg para ocho (8) subintervalos, obteniendo como resultado 2155.7837 W · min.

- Luego se obtuvo el calor total ($Q_t otal$) multiplicando por 60 el resultado de la integral de la potencia, obteniendo 129347.0220 J.

- Seguidamente se obtuvo la energía calórica ($Q_c alor$), con un valor de 84075.5643 J.

- Considerando que la temperatura del ambiente en Valledupar es superior a 30°C, la capacidad de extracción térmica del sistema de refrigeración A se ve disminuida en un 20%, es decir tendría una capacidad de 67260.4514 J.

- Dado que el sistema de refrigeración A reduce su desempeño en un 20% cuando la temperatura ambiente supera los 30°C —condición común en la ciudad de Valledupar—, su capacidad efectiva de extracción térmica resulta insuficiente para disipar el calor generado por el servidor. En contraste, el sistema de refrigeración B mantiene un rendimiento constante y cumple con las especificaciones técnicas requeridas, por lo que se considera la opción más adecuada para garantizar el funcionamiento seguro y eficiente del equipo.

- El costo de instalación y mantenimiento para un año del sistema de refrigeración seleccionado es de 5.850.000 COP

Ejemplo 4

Evaluación de eficiencia hídrica en un sistema de riego por goteo

Contextualización del problema

El riego es una de las prácticas agrícolas más determinantes para garantizar la producción sostenible de alimentos, especialmente en regiones donde la disponibilidad de agua no es constante o las lluvias son insuficientes. A través del suministro controlado de agua a los cultivos, los sistemas de riego permiten mantener la humedad del suelo dentro de niveles óptimos, lo que favorece el desarrollo radicular, la absorción de nutrientes y, en consecuencia, el rendimiento de las cosechas.

En la actualidad, la implementación de sistemas de riego tecnificados —como el riego por goteo, por aspersión o automatizado— representa una solución eficiente frente a la escasez hídrica y los retos del cambio climático. Estos sistemas permiten reducir el consumo de agua, minimizar pérdidas por evaporación o escorrentía, y focalizar el recurso directamente en la zona radicular de cada planta, mejorando significativamente la eficiencia del uso del agua.

Descripción y modelamiento del problema

La granja experimental de la Universidad Popular del Cesar sede Aguachica se encuentra ubicada a 12 km del casco urbano de la ciudad, específicamente en la vereda Cerro Redondo. En este espacio agrícola se cultiva principalmente maíz, y para su hidratación se ha implementado un sistema de riego por goteo alimentado por una bomba solar. La eficiencia del sistema depende de la cantidad de agua absorbida por cada planta durante el ciclo de riego. La presión del sistema varía levemente con el paso del tiempo, lo que afecta la velocidad de salida del agua en los goteros.

La tasa de flujo de agua por gotero (en litros por minuto) se modela con la función:

$$f(t) = 0.2 + t^2 \cdot e^{-0.3t}$$

La cantidad total de agua absorbida por planta viene dada por:

$$A = 0.1 \int_0^t f(t)\, dt$$

Además, el agricultor tiene instalados 50 goteros y sabe que:

- Cada planta debe recibir al menos 7 litros en 30 minutos.

Pregunta problema

- ¿Cuánta agua absorbe una planta en 30 minutos?
- ¿Se cumple el mínimo de 7 litros por planta?
- Si el cultivo presenta una densidad de 1000 plantas de maíz por hectárea, ¿Qué cantidad de volumen de agua se desperdicia durante el ciclo de riego de 30 min para una hectárea?

Requisitos o condiciones del problema

- Resolver la integral utilizando el método de Romberg para n=8 subintervalos.
- Presentar los resultados utilizando un redondeo con 4 cifras decimales.

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(t) = 0.2 + t^2 \cdot e^{-0.3t}$

- Límite inferior: a=0
- Límite superior: b=30
- Número de subintervalos: n=8
- Número de decimales: 4

Solución numérica

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b-a}{n} = \frac{30-0}{8} = 3.75$$

Tabla 33

Valores de $f(t) = 0.2 + t^2 \cdot e^{-0.3t}$

i	t_i	$P(t_i)$
0	0.0000	0.2000
1	3.7500	4.7654
2	7.5000	6.1287
3	11.2500	4.5307
4	15.0000	2.6995
5	18.7500	1.4679
6	22.5000	0.7928
7	26.2500	0.4619
8	30.0000	0.3111

$$h = b - a = 30 - 0 = 10$$

$$R_{1,1} = \frac{30}{2}[0.2000 + 0.3111] = 7.6665$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}[7.6665 + (30) \cdot 2.6995] = 44.3258$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[44.3258 + \frac{30}{2} \cdot [6.1287 + 0.7928]\right] = 74.0742$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[74.0742 + \frac{30}{4} \cdot [4.7654 + 4.5307 + 1.4679 + 0.4619]\right] = 79.1342$$

$$R_{2,2} = 44.3258 + \frac{44.3258 - 7.6665}{3} = 56.5456$$

$$R_{3,2} = 74.0742 + \frac{74.0742 - 44.3258}{3} = 83.9903$$

$$R_{4,2} = 79.1342 + \frac{79.1342 - 74.0741}{3} = 80.8209$$

$$R_{3,3} = 83.9903 + \frac{83.9903 - 56.5456}{15} = 85.8199$$

$$R_{4,3} = 80.8209 + \frac{80.8209 - 83.9903}{15} = 80.6096$$

$$R_{4,4} = 80.6096 + \frac{80.6096 - 85.8199}{63} = 80.5269$$

Es decir:

$$A = 0.1 \int_0^{30} f\,(t)\,dt = 0.1 \int_0^{30} (0.2 + t^2 \cdot e^{-0.3t})\ dt$$

$$A = 0.1 \cdot (80.5269\ \mathrm{lt}) = 8.0527\ \mathrm{lt}$$

Análisis y Conclusiones de los Resultados

- Inicialmente se calculó la cantidad de agua absorbida por una planta en 30 min mediante la fórmula dada con el método de Romberg para ocho (8) subintervalos, obteniendo como resultado 8.0527 lt.

- Con el sistema de riego actual se garantiza que cada planta reciba la cantidad de agua mínima, siendo en este caso 8.0527 lt.

- Por cada hectárea de cultivo se están desperdiciando (8.0527 lt - 7.00 lt) · 1000, para un total de 1052.7 lt de agua.

5.7 Ejemplos propuestos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

1. Resuelva la integral de forma analítica.

2. Aproxime el valor de la integral utilizando el método de Romberg hasta un nivel de refinamiento 3, es decir, calcule el valor de $R_{4,4}$.

3. Estime el error aproximado entre niveles sucesivos, utilizando la fórmula:

$$E_e \approx |R_{k,j} - R_{k-1,j-1}|$$

Para esto, calcule:

- El error entre $R_{4,4}$ y su anterior $R_{3,3}$.
- El error entre $R_{3,3}$ y su anterior $R_{2,2}$.

4. Utilice un redondeo de 4 decimales.

5. Analice los resultados obtenidos: ¿El error entre niveles sucesivos fue alto o bajo? ¿Qué comportamiento observa al aumentar progresivamente el número de subintervalos? Explique su respuesta a partir de la teoría del método de Romberg, teniendo en cuenta el propósito de la extrapolación para mejorar la precisión de la aproximación.

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproxime el valor de la siguiente integral utilizando el método de Romberg hasta obtener $R_{4,4}$. Redondee todos los resultados intermedios y finales a 4 decimales.

$$\int_0^5 \frac{1}{1+e^{-0.5x}}\,dx$$

Ejemplo 3

El doctor en Ciencias de la Computación Sebastián Andrade Gómez, docente e investigador de la Universidad Tecnológica del Sur (UTS) está realizando una prueba de simulación para analizar el desempeño de un modelo de clasificación del nivel de producción de energía fotovoltaica a partir de condiciones ambientales basado en redes neuronales. Una de las métricas fundamentales para evaluar este tipo de modelos es el área bajo la curva ROC (AUC), la cual refleja la capacidad del modelo para discriminar entre clases positivas y negativas a diferentes umbrales de decisión.

La curva ROC se ha aproximado experimentalmente mediante los siguientes puntos, que representan pares de False Positive Rate (FPR) y True Positive Rate (TPR) para distintos umbrales:

Tabla 34:

Aproximación experimental de la curva ROC

Tiempo	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Velocidad	0.0	0.4	0.6	0.75	0.85	0.9	0.93	0.95	0.97	0.98	1.0

https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7

El área bajo esta curva se puede aproximar mediante la siguiente integral definida:

$$AUC = \int_0^1 T\,PR(FPR)\,dFPR$$

Observación:

La notación TPR(FPR) indica que el True Positive Rate (TPR) depende del valor del False Positive Rate (FPR). Por lo tanto, se está integrando una función que describe cómo varía el TPR a medida que cambia el FPR. Esta expresión no debe interpretarse como un producto entre TPR y FPR.

Ejemplo 4

Una empresa de desarrollo de software científico ha identificado la necesidad de construir un sistema que automatice la integración numérica mediante el método de Romberg, aprovechando la potencia de los Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS) y de las librerías matemáticas modernas.

Solicitudes

1. Analizar el problema y proponer un título técnico adecuado que refleje su contexto y un nombre para la empresa de desarrollo de software.
2. Requerimientos funcionales:
    a. Permitir al usuario ingresar una función simbólica $f(x)$ y los límites de integración $[a, b]$.
    b. Aceptar también datos tabulados (x_i, y_i) como fuente de información, reconociendo si los puntos son equi-espaciados o, en caso contrario, aplicando interpolación para obtener una función aproximada.

c. Resolver la integral definida aplicando el método de Romberg, que combina el método del trapecio compuesto con la extrapolación de Richardson para mejorar la precisión.

d. Generar como salida una tabla de resultados con los valores intermedios de Romberg y representar gráficamente la función o los datos ingresados.

e. Cuando sea posible, comparar con la solución simbólica exacta para validar la precisión del método.

3. Desarrollar la solución del problema siguiendo esta estructura:

- Contextualización del problema.

    - Descripción y modelamiento matemático que justifique el uso del método asignado (integración numérica).

    - Formulación de una pregunta problema clara y técnica.

Entrega Final

- Código completo del software.

- Prueba en tiempo real del software.

El grupo deberá entregar un informe académico final, redactado de manera profesional bajo normas APA. El informe debe incluir:

- Argumentación técnica y fundamentada de la elección del lenguaje de programación y librerías utilizadas.

- Elaboración de una presentación de diapositivas (slides) para la sustentación oral del proyecto, que sintetice de forma clara y profesional el proceso, los resultados y la conclusión.

- Referencias bibliográficas actualizadas y pertinentes que respalden las decisiones tomadas y los conceptos explicados.

ISBN: 978-628-97230-0-7

https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7.ch05

Cómo citar: Tamayo Benjumea, C. A., Calderón Acosta, J. G., Badillo Durán, L., & Coronel Casadiego, J. J. (2025). Método de Romberg. In (Ed.), *Integración numérica con aprendizaje basado en problemas: teoría, ejercicios y aplicaciones en ingeniería* (pp. 110-136). Editorial PLAGCIS. https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7.ch05