

## Capítulo 4

### Método de Simpson 3/8

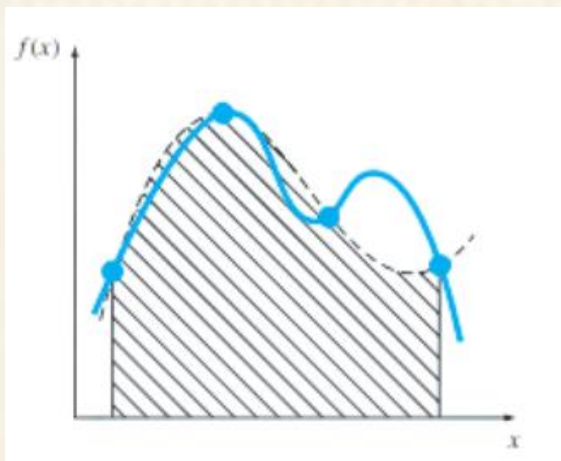
#### 4.1. Fundamentos Teóricos

El método de Simpson 3/8 es una variación del método de Simpson 1/3, que utiliza tres subintervalos para ajustar un polinomio cúbico (polinomio de grado 3) sobre cada tramo. Aunque es menos común que el método de Simpson 1/3, es muy útil cuando el número de subintervalos no es divisible por 2 pero sí por 3, o cuando se desea mejorar la precisión de la aproximación en funciones más complejas.

#### 4.2. Representación Gráfica y Fórmula

##### Figura 10

*Descripción Gráfica del Método de Simpson 3/8.*



Para aproximar la integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  mediante el método de Simpson 3/8, se sustituye la función  $f(x)$  por un polinomio de tercer grado, ya que, como

se observa en la gráfica correspondiente, este método utiliza cuatro puntos ajustados a un polinomio cúbico.

De aquí:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_3(x) dx$$

Considerando los puntos:

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h$$

Haciendo  $a = x_0, b = x_3$  y aplicando interpolación de Lagrange para el polinomio cúbico  $f_3(x)$ , se tiene que:

$$I = \int_{x_0}^{x_3} \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1) \right. \\ \left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3) \right] dx$$

El resultado de esta integral es:

$$I \approx \frac{3\Delta x}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)], \text{ siendo } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Esta es la tercera fórmula de integración cerrada de Newton-Cotes. Al igual que el método de Simpson 1/3, está también puede deducirse usando el polinomio de Newton-Gregory.

Para llegar a la forma extendida, se requiere que el número de subintervalos  $n$  sea múltiplo de 3, es decir,  $n=3m$ , lo que implica que hay  $m$  grupos de cuatro puntos.

Denotando los nodos:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

Para cada grupo  $(x_{3j}, x_{3j+1}, x_{3j+2}, x_{3j+3})$ , se tiene que:

$$\int_{x_{3j}}^{x_{3j+3}} f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} [f_{3j} + 3f_{3j+1} + 3f_{3j+2} + f_{3j+3}]$$

Sumando sobre  $j=0, \dots, m-1$ , obtenemos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \sum_{j=0}^{m-1} [f_{3j} + 3f_{3j+1} + 3f_{3j+2} + f_{3j+3}]$$

Agrupando términos, se obtiene la fórmula compuesta del método de Simpson 3/8:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[ f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \bmod 3 \neq 0}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \bmod 3 = 0}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Donde:

- $f(x_0)$  y  $f(x_n)$  aparecen una sola vez
- Los nodos que no son múltiplos de 3 (interiores) aparecen con peso 3.
- Los nodos interiores múltiplos de 3 (excepto extremos) aparecen con peso 2.

### 4.3. Error de Truncamiento

El error de truncamiento para el método de Simpson 3/8 viene dado por la fórmula.

$$E_t = -\frac{3(b-a)^5}{80n^5} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i)$$

$$E_t = -\frac{3(b-a)^5}{80n^6} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i)$$

donde  $f^{(4)}(\xi_i)$  es la cuarta derivada de la función evaluada en un punto  $\xi_i$ , localizado en el segmento  $i$ . Este resultado se simplifica al estimar la media o valor promedio de la segunda derivada en todo el intervalo  $[a, b]$ .

Como explican Chapra & Canale (2011), aunque la regla de Simpson 3/8 requiere más nodos por aplicación que la 1/3, proporciona una alternativa más precisa en casos donde se dispone de un número de subintervalos múltiplo de 3, y su fórmula de error demuestra que alcanza exactitud para funciones cúbicas a pesar de integrar un polinomio de tercer grado.

#### 4.4. Ventajas

- Proporciona mayor precisión que el método del trapecio o incluso que Simpson 1/3 en funciones que requieren un mejor ajuste cúbico.
- Es apropiado para integrales complejas, especialmente aquellas con variaciones suaves y continuas, donde un polinomio de tercer grado se ajusta mejor.
- Permite usarlo cuando el número de subintervalos es múltiplo de 3, lo que ofrece mayor flexibilidad en ciertos problemas prácticos.
- Tiene aplicaciones reales en áreas científicas, como:
  - Análisis térmico
  - Cálculo de carga eléctrica
  - Modelos de propagación en epidemiología
  - Ingeniería y dinámica de fluidos
- Su implementación computacional es sencilla y se adapta bien a rutinas de integración numérica automatizadas.

#### 4.5. Desventajas

- Requiere que el número de subintervalos sea múltiplo de 3, lo que limita su uso en dominios arbitrarios.
- Puede ser menos eficiente que Simpson 1/3 compuesto cuando se desea cubrir un número mayor de subintervalos sin restricción.
- El error depende de la cuarta derivada de la función, por lo que, si esta es muy variable o difícil de estimar, puede generar imprecisiones.
- Si se aplica sobre funciones con cambios bruscos o discontinuidades, pierde precisión respecto a métodos adaptativos.
- Aunque se basa en un polinomio cúbico, no siempre mejora significativamente el resultado comparado con métodos más simples, pero más segmentados.

#### 4.6. Ejemplos Resueltos

##### Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

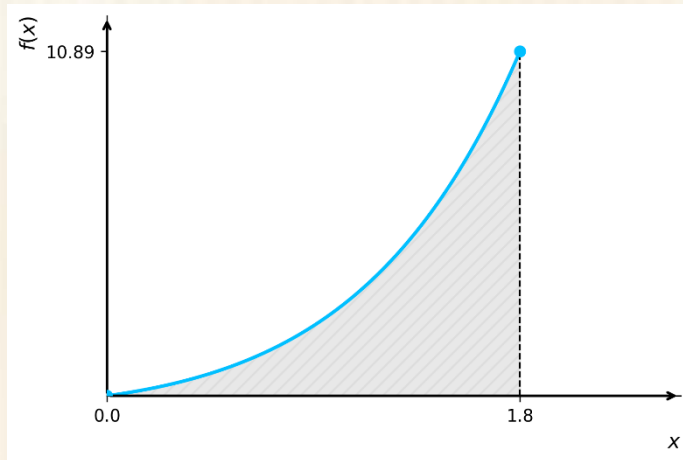
$$\int_0^{1.8} x e^x dx$$

1. Resuelva la integral de forma analítica, utilizando la técnica de integración apropiada.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el método de simpson 3/8 para  $n=3$  y  $n=6$  subintervalos.
3. Calcule el error del método de simpson 3/8 utilizando la fórmula sugerida.
4. Utilice un redondeo de 4 decimales.
5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

##### Solución Analítica

**Figura 11**

Área bajo la curva de  $f(x) = xe^x$



$$\int_0^{1.8} x e^x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int_0^{1.8} x e^x dx = [x e^x]_0^{1.8} - \int_0^{1.8} e^x dx = x e^x - e^x$$

$$\int_0^{1.8} x e^x dx = [x e^x]_0^{1.8} - \int_0^{1.8} e^x dx = x e^x - e^x$$

$$\int_0^{1.8} x e^x dx = [x e^x - e^x]_0^{1.8}$$

$$\int_0^{1.8} x e^x dx = [(1.8)e^{1.8} - e^{1.8}] - [(0)e^0 - e^0] = 4.8397 - (-1)$$

$$\int_0^{1.8} x e^x dx = 5.8397$$

Solución Numérica para  $n=3$

Paso 1: Datos del problema

- Función:  $f(x) = xe^x$
- Límite inferior:  $a = 0$

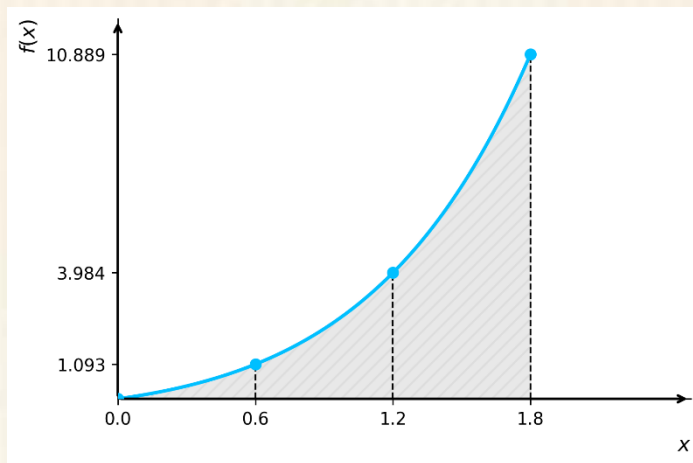
- Límite superior:  $b = 1.8$
- Número de subintervalos:  $n = 3$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1.8 - 0}{3} = 0.6$$

**Figura 12**

Área bajo la curva de  $f(x) = xe^x$



**Tabla 20**

Valores de  $f(x) = xe^x$  en el intervalo  $[0, 1.8]$

| i | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|-------|----------|
| 0 | 0.0   | 0.0000   |
| 1 | 0.6   | 1.0933   |
| 2 | 1.2   | 3.9841   |
| 3 | 1.8   | 10.8894  |

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[ f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2 (3)}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0 (3)}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^{1.8} x e^x dx \approx \frac{3(0.60)}{8} [0.0000 + 3(1.0933 + 3.9841) + 10.8894]$$

$$\int_0^{1.8} x e^x dx \approx 5.8774$$

Solución Numérica para  $n=6$

Paso 1: Datos del problema

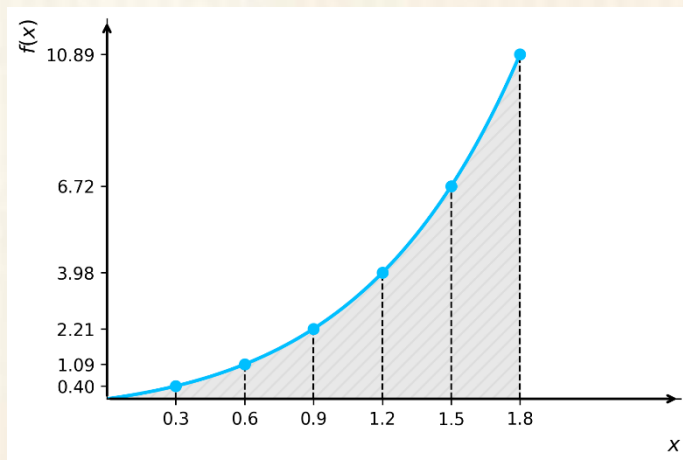
- Función:  $f(x) = xe^x$
- Límite inferior:  $a = 0$
- Límite superior:  $b = 1.8$
- Número de subintervalos:  $n = 6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1.8 - 0}{6} = 0.3$$

**Figura 13**

Área bajo la curva de  $f(x) = xe^x$



**Tabla 21**

Valores de  $f(x) = xe^x$  en el intervalo  $[0, 1.8]$  con  $n = 6$  subintervalos

| <b>i</b> | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|----------|-------|----------|
| <b>0</b> | 0.0   | 0.0000   |
| <b>1</b> | 0.3   | 0.4050   |
| <b>2</b> | 0.6   | 1.0933   |
| <b>3</b> | 0.9   | 2.2136   |
| <b>4</b> | 1.2   | 3.9841   |

| <b>i</b> | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|----------|-------|----------|
| <b>5</b> | 1.5   | 6.7225   |
| <b>6</b> | 1.8   | 10.8894  |

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[ f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2 \pmod{3}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0 \pmod{3}}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^{1.8} x e^x dx \approx \frac{3(0.30)}{8} [0.0000 + 3(0.4050 + 1.0933 + 3.9841 + 6.7225) + 2(2.2136) + 10.8894]$$

$$\int_0^{1.8} x e^x dx \approx 5.8423$$

Cálculo del error

Información

- $f(x) = xe^x$
- $f^{(4)}(x) = xe^x + 4e^x$
- Límite inferior: a=0
- Límite superior: b=1.8
- $E_t = -\frac{3(b-a)^5}{80n^6} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i)$

Para n=3

**Tabla 22**

$f^{(4)}(\xi_i)$ , donde  $\xi_i$  es el punto medio de cada intervalo

| <b>i</b> | $\xi_i$ | $f^{(4)}(\xi_i)$ |
|----------|---------|------------------|
| <b>1</b> | 0.3     | 5.8044           |
| <b>2</b> | 0.9     | 12.0521          |
| <b>3</b> | 1.5     | 24.6493          |

$$\sum_{i=1}^3 f^{(4)}(\xi_i) = (5.8044) + (12.0521) + (24.6493)$$

$$\sum_{i=1}^3 f^{(4)}(\xi_i) = 42.5058$$

$$E_T = -\frac{3(1.8-0)^5}{80 \cdot (3)^6} \cdot 42.5058 = -0.0413$$

Para  $n=6$

**Tabla 23**

$f^{(4)}(\xi_i)$  donde  $\xi_i$  es el punto medio de cada intervalo

| i | $\xi_i$ | $f^{(4)}(\xi_i)$ |
|---|---------|------------------|
| 1 | 0.15    | 4.8216           |
| 2 | 0.45    | 6.9790           |
| 3 | 0.75    | 10.0558          |
| 4 | 1.05    | 14.4311          |
| 5 | 1.35    | 20.6372          |
| 6 | 1.65    | 29.4194          |

$$\sum_{i=1}^6 f^{(4)}(\xi_i) = (4.8216) + (6.9790) + (10.0558) + (14.4311) + (20.6372) + (29.4194)$$

$$\sum_{i=1}^6 f^{(4)}(\xi_i) = 86.3441$$

$$E_T = -\frac{3(1.8-0)^5}{80 \cdot (6)^6} \cdot 86.3441 = -0.0013$$

- El signo negativo en el resultado de ambos errores indica que el valor aproximado del área bajo la curva resulta mayor que la integral exacta, es decir, la regla numérica produce una sobreestimación.
- Cuando se aumentó el número de intervalos se obtuvo una mejor aproximación al valor real y un menor error, dado que el error  $E_T$  es inversamente proporcional a la sexta potencia del número de subintervalos  $n$ .

## Ejemplo 2

### Estimación de una integral no elemental

Aproximar el valor de la siguiente integral dada mediante la Regla de Simpson 3/8 con 6 subintervalos, redondeando los resultados a 4 decimales.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx$$

#### Paso 1: Información del problema

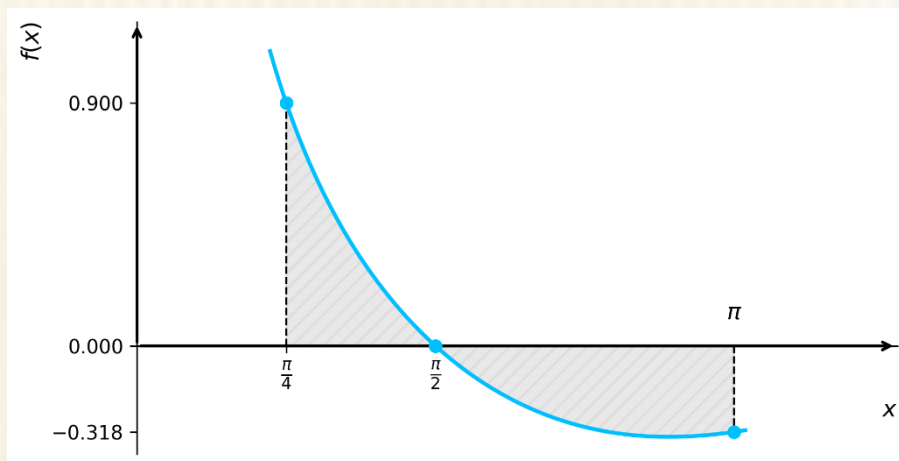
- Función:  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$
- Límite inferior:  $a = \frac{\pi}{4}$
- Límite superior:  $b = \pi$
- Número de subintervalos:  $n = 6$
- Número de decimales: 4

#### Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{6} = \frac{\pi}{8}$$

**Figura 14:**

Área bajo la curva de  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$



**Tabla 24**

Valores de  $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$  en el intervalo  $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

| <b>i</b> | $x_i$            | $f(x_i)$ |
|----------|------------------|----------|
| <b>0</b> | $\frac{\pi}{4}$  | 0.9003   |
| <b>1</b> | $\frac{3\pi}{8}$ | 0.3248   |
| <b>2</b> | $\frac{\pi}{2}$  | 0.0000   |
| <b>3</b> | $\frac{5\pi}{8}$ | -0.1949  |
| <b>4</b> | $\frac{3\pi}{4}$ | -0.3001  |
| <b>5</b> | $\frac{7\pi}{8}$ | -0.3361  |
| <b>6</b> | $\pi$            | -0.3183  |

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[ f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2 \pmod{3}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0 \pmod{3}}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx &\approx \frac{3(\frac{\pi}{8})}{8} [0.9003 + 3(0.3248 + 0.0000 + (-0.3001)) \\ &\quad + (-0.3361)) + 2((-0.1949)) + (-0.3183)] \\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx &\approx -0.1093 \end{aligned}$$

### Ejemplo 3

#### Estimación de Activación y Control de Sobreajuste en Redes Neuronales Artificiales

##### *Contextualización del problema*

En el diseño de redes neuronales artificiales, las capas ocultas juegan un papel fundamental en la capacidad del modelo para aprender patrones complejos a partir de los datos. Cada neurona en estas capas recibe entradas ponderadas y aplica funciones de activación que determinan su nivel de respuesta frente a los estímulos. Durante el entrenamiento, es esencial monitorear cómo se comportan estas activaciones para evaluar si el modelo está generalizando correctamente o si, por el contrario, está aprendiendo de forma excesiva los datos de entrenamiento (sobreajuste).

Una forma de analizar el comportamiento colectivo de una capa oculta consiste en estudiar la activación acumulada de sus neuronas a lo largo de un intervalo de tiempo o durante una serie de estímulos. Esta métrica proporciona una estimación de la carga funcional de la capa, permitiendo diagnosticar posibles casos de activación excesiva.

Al estimar esta activación acumulada mediante métodos de integración numérica, es posible tomar decisiones fundamentadas sobre estrategias de regularización, como el uso del DropOut, que consiste en desactivar aleatoriamente un porcentaje de neuronas durante el entrenamiento para mejorar la generalización del modelo.

#### *Descripción y modelamiento del problema*

En una red neuronal artificial entrenada para reconocer señales biomédicas, se monitorea la respuesta (activación) de la capa oculta durante un intervalo de tiempo en el que recibe el conjunto de datos.

Para evaluar su comportamiento global durante una ventana de tiempo, es necesario calcular la activación acumulada, es decir, el área bajo la curva de activación. La función  $A(t)$  describe la intensidad con la que las neuronas de la capa oculta se activan frente a los estímulos recibidos.

$$A(t) = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{1}{1 + e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right) \right) dt$$

donde:

- $A(t)$  representa la activación instantánea de la neurona (sin unidad),
- $t$  es el tiempo en segundos, dentro del intervalo de análisis.

Al estimar esta activación acumulada mediante métodos de integración numérica, es posible tomar decisiones fundamentadas sobre estrategias de regularización, como el uso del DropOut, que consiste en desactivar aleatoriamente un porcentaje de neuronas durante el entrenamiento para mejorar la generalización del modelo.

Una vez calculada la activación acumulada  $A$  de la capa oculta, se puede determinar si es necesario aplicar Dropout para evitar el sobreajuste (overfitting), y en qué proporción. Para ello, se define la siguiente función de decisión:

$$D(A) = \begin{cases} 0\% & \text{si } A < 2 \quad (\text{no se requiere Dropout}) \\ 20\% & \text{si } 2 \leq A < 3.5 \\ 30\% & \text{si } 3.5 \leq A < 5 \\ 40\% & \text{si } A \geq 5 \end{cases}$$

### Pregunta problema

¿Cuál es la activación acumulada aproximada del conjunto de neuronas que conforman la capa oculta de la red neuronal artificial entre los segundos  $t=0$  y  $t=8$ ? Basado en la función de decisión determine si es necesario utilizar la técnica de regularización Dropout en qué porcentaje.

Paso 1: Información del problema

- Función:  $A(t) = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{1}{1+e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right) \right) dt$
- Límite inferior:  $a=0$
- Límite superior:  $b=9$
- Número de subintervalos:  $n=6$
- Número de decimales: 4

### Solución numérica

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b-a}{n} = \frac{9-0}{6} = 1.50$$

**Tabla 25:**

Valores de  $f(t) = \frac{1}{1+e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right)$

| <b>i</b> | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|----------|-------|----------|
| 0        | 0.00  | 0.5000   |
| 1        | 1.50  | 0.6581   |
| 2        | 3.00  | 0.7175   |
| 3        | 4.50  | 0.6619   |
| 4        | 6.00  | 0.5147   |

| <b>i</b> | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|----------|-------|----------|
| <b>5</b> | 7.50  | 0.3081   |
| <b>6</b> | 9.00  | 0.0700   |

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{3\Delta t}{8} \left[ f(t_0) + 3 \sum_{i \equiv 1,2 \pmod{3}}^{n-1} f(t_i) + 2 \sum_{i \equiv 0 \pmod{3}}^{n-3} f(t_i) + f(t_n) \right]$$

$$A(t) = \int_0^9 \left( \frac{1}{1 + e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right) \right) dt \approx \frac{3(1.50)}{8} [0.500 + 3(0.6581 + 0.7175 + 0.5147 + 0.3081) + 2(0.6619) + 0.0700]$$

$$A(t) = \int_0^9 \left( \frac{1}{1 + e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right) \right) dt \approx 4.7751$$

#### Análisis y Conclusiones de los Resultados

- Se calculó la activación acumulada de las neuronas de la capa oculta mediante el método de Simpson 3/8 para seis (6) subintervalos, obteniendo un valor de 4.7751.
- Según este valor de activación acumulada y basado en la función de decisión  $D(A)$ , se debe aplicar la técnica DropOut con un apagado del 30% de la cantidad de neuronas que conforman la capa oculta del modelo neuronal para evitar el sobreajuste del aprendizaje.

#### Ejemplo 4

*Estimación de costos de fabricación de un brazo robótico*

*Contextualización del problema*

En el desarrollo de sistemas robóticos industriales, el diseño de componentes mecánicos no solo debe satisfacer criterios funcionales como resistencia y movilidad, sino también optimizar aspectos relacionados con el uso de materiales, el peso y la estética, buscando una fabricación de prototipos eficientes tanto en volumen como en costos.

Para mejorar el rendimiento del brazo robótico y reducir su peso sin comprometer su rigidez estructural, los ingenieros han decidido fabricar una

articulación a partir del giro de una curva suave alrededor del eje  $x$ , generando un sólido de revolución con un perfil ergonómico y aerodinámico.

### *Descripción y modelamiento del problema*

Durante la etapa de evaluación de alternativas de diseño para un brazo robótico industrial, los estudiantes de la asignatura Modelamiento y Simulación de la Universidad Popular del Cesar, sede Aguachica proponen dos perfiles diferentes, obtenidos mediante la rotación de curvas alrededor del eje  $x$ . Esta operación genera sólidos de revolución cuya forma define el volumen total del material necesario para su fabricación.

Los perfiles a rotar y sus opciones de fabricación están dados por:

#### *Diseño A:*

- Curva:  $f_A(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)e^{-0.15x}$
- Material: PLA reciclado
- Costo del material y fabricación: \$25.000 COP/m<sup>3</sup>

#### *Diseño B:*

- Curva:  $f_B(x) = \ln(x^2 + 1) \cdot e^{-0.2x}$
- Material: Aluminio anodizado
- Costo del material y fabricación: \$103.000 COP/m<sup>3</sup>

La forma del brazo se genera al rotar cada curva alrededor del eje  $x$ , lo que permite calcular el volumen mediante:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

### *Pregunta problema*

- ¿Cuál es el volumen aproximado del segmento del brazo robótico para cada diseño, si se considera una longitud de 4 m?

- ¿Cuál opción representa un menor costo total basado en el precio del material y el proceso de fabricación?
- ¿Cuál es el costo de fabricación de 5 unidades con el diseño elegido?

*Requisitos o condiciones del problema*

- Resolver cada integral mediante el método de Simpson 3/8 para 6 subintervalos redondeando los resultados a 4 cifras decimales.
- Adicionar un 5% de volumen extra por pérdidas de material.

*Solución Numérica*

Diseño A

Paso 1: Información del problema

- Función:  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
- Límite inferior:  $a=0$
- Límite superior:  $b=4$
- Número de subintervalos:  $n=6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 0}{6} = 0.6667$$

$$V_A = \pi \int_0^4 \left[ \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) e^{-0.15x} \right]^2 dx$$

**Tabla 26**

Valores de  $f_A(x) = \pi \left[ 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) e^{-0.15x} \right]^2$

| i | $x_i$  | $f(x_i)$ |
|---|--------|----------|
| 0 | 0.0000 | 28.2743  |
| 1 | 0.6667 | 24.3423  |
| 2 | 1.3334 | 18.2365  |
| 3 | 2.0001 | 12.5656  |
| 4 | 2.6668 | 8.7070   |
| 5 | 3.3335 | 6.8322   |
| 6 | 4.0000 | 6.6160   |

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[ f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2 \pmod{3}}}^{n-1} f(t_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0 \pmod{3}}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$V_A = \pi \int_0^4 \left[ \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) e^{-0.15x} \right]^2 dx \approx \frac{3(0.6667)}{8} [28.2743 + 3(24.3423 + 18.2365 + 8.7070 + 6.8322) + 2(12.5656) + 6.6160]$$

$$V_A = 58.5968 \text{ mt}^3$$

Adicionando un 5% según las condiciones del problema:

$$V_A = 58.5968(1 + 0.05) = 61.5266 \text{ mt}^3$$

El costo de fabricación por unidad es:

$$C_A = (61.5266 \text{ m}^3)(25000 \text{ COP/m}^3) = 1.538.166 \text{ COP}$$

## Diseño B

### Paso 1: Información del problema

- Función:  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
- Límite inferior:  $a=0$
- Límite superior:  $b=4$
- Número de subintervalos:  $n=6$

- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 0}{6} = 0.6667$$

$$V_B = \pi \int_0^4 [\ln(x^2 + 1) \cdot e^{-0.2x}]^2 dx$$

**Tabla 27**

Valores de  $f_B(x) = \pi[\ln(x^2 + 1) \cdot e^{-0.2x}]^2$

| i | $x_i$  | $f(x_i)$ |
|---|--------|----------|
| 0 | 0.0000 | 0.0000   |
| 1 | 0.6667 | 0.3254   |
| 2 | 1.3334 | 1.9239   |
| 3 | 2.0001 | 3.6567   |
| 4 | 2.6668 | 4.7375   |
| 5 | 3.3335 | 5.1514   |

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[ f(x_0) + 3 \sum_{i=1,2 \pmod{3}}^{n-1} f(t_i) + 2 \sum_{i=3 \pmod{3}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$V_B = \pi \int_0^4 [\ln(x^2 + 1) \cdot e^{-0.2x}]^2 dx \approx \frac{3(0.6667)}{8} [0.00 + 3(0.3254 + 1.9239 + 4.7375 + 5.1514) + 2(3.6567) + 5.0914]$$

$$V_B = 12.2055 \text{ mt}^3$$

Adicionando un 5% según las condiciones del problema:

$$V_B = 12.2055(1 + 0.05) = 12.8158 \text{ mt}^3$$

El costo de fabricación por unidad es:

$$C_B = (12.8158 \text{ m}^3)(103000 \text{ COP/m}^3) = 1.320.027 \text{ COP}$$

### *Análisis y conclusiones de los resultados*

- Se calculó el volumen de manera independiente para cada diseño mediante el método de Simpson 3/8 para seis (6) subintervalos, y a estos resultados se les adicionó el 5% extra sugerido por pérdidas de material en el proceso de fabricación.
- Para el diseño A se obtuvo un costo de 1.538.166 COP y para el diseño B de 1.320.027 COP, por lo cual se decide fabricar el brazo robótico con el material aluminio anodizado.
- El costo de fabricación de 5 unidades del diseño B es de 6.600.135 COP.

## 4.7. Ejemplos Propuestos

### Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^{3.6} e^x \sin x \, dx$$

1. Resuelva la integral de forma analítica, utilizando la técnica de integración apropiada.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el método de simpson 3/8 para  $n=3$  y  $n=6$  subintervalos.
3. Calcule el error del método de simpson 3/8 utilizando la fórmula sugerida.
4. Utilice un redondeo de 4 decimales.
5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

### Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproximar el valor de la siguiente integral dada mediante la Regla de Simpson 3/8 con 6 subintervalos, redondeando los resultados a 4 decimales.

$$\int_0^{\ln 2} \sin(\ln x) dx$$

### Ejemplo 3

El Semillero de Investigación en Aprendizaje Automático y Modelos Predictivos (SIAMP) de la Universidad Provincial del Oriente (UPO) está realizando un ejercicio de simulación para evaluar el rendimiento acumulado de un modelo de clasificación basado en redes neuronales, el cual se ha desarrollado como parte de una plataforma de apoyo al diagnóstico médico.

El rendimiento del modelo, medido como precisión (accuracy), varía en función del umbral de decisión aplicado a la probabilidad de clasificación positiva. Con el fin de analizar el comportamiento acumulado de la precisión a lo largo de distintos umbrales, el grupo ha recolectado datos simulados que representan la precisión obtenida para umbrales comprendidos entre 0.1 y 0.7.

La precisión total acumulada se modela mediante la siguiente integral:

$$P_{\text{total}} = \int_{t_0}^{t_f} Acc(t) dt$$

Donde:

- $P_{\text{total}}$  = Precisión acumulada (unidades arbitrarias).
- $Acc(t)$  = Precisión del modelo en función del umbral  $t$ .
- $t$  = Umbral de decisión (escala de 0 a 1).

Los datos contenidos en la siguiente tabla no provienen de un sistema en producción, sino de un ejercicio experimental que busca aproximar, de manera razonable, el comportamiento esperado del modelo para diferentes configuraciones de umbral.

**Tabla 28**

*Simulación del comportamiento de la precisión en función del umbral*

| Umbral ( $t$ ) | Precisión $Acc(t)$ |
|----------------|--------------------|
| 0.1            | 0.80               |
| 0.2            | 0.85               |
| 0.3            | 0.88               |
| 0.4            | 0.91               |
| 0.5            | 0.90               |
| 0.6            | 0.87               |
| 0.7            | 0.83               |

1. Analice el problema presentado y proponga un título técnico adecuado que refleje claramente su contexto, propósito y el área de conocimiento al que pertenece.
2. Desarrolle la solución de este problema siguiendo la estructura:
  - Contextualización del problema.
  - Descripción y modelamiento del problema.
  - Pregunta problema.
3. Estime mediante la regla de Simpson 3/8 la precisión acumulada del modelo durante el intervalo de umbrales evaluado.
4. Explique brevemente:
  - ¿Qué es el umbral de decisión en un modelo de clasificación basado en redes neuronales?
  - ¿Por qué es importante analizar el rendimiento del modelo en función de diferentes umbrales y no limitarse a uno solo?
  - ¿La precisión (accuracy) es la única métrica adecuada para evaluar modelos de clasificación? Justifique su respuesta y mencione otras métricas que considere relevantes.

#### Ejemplo 4

El sector financiero ha convocado a dos empresas especializadas en inteligencia artificial para demostrar la capacidad de sus modelos de clasificación en la detección temprana de fraudes bancarios. Ambas buscan ganar un contrato estratégico para implementar su solución a nivel nacional.

La institución financiera otorgará el contrato a la empresa que logre demostrar, con evidencia matemática y técnica, la mayor capacidad de detección sostenida (Recall acumulado) a lo largo del tiempo.

- Empresa A: Se ha enfocado en el desarrollo de modelos de Deep Learning basados en funciones de activación ReLU en sus capas ocultas, priorizando la eficiencia y la rapidez de entrenamiento. Esta empresa presenta sus resultados de clasificación directamente a través de cifras tabuladas que muestran el total de TP, FN, FP y TN en cada fase de prueba.
- Empresa B: Su enfoque ha sido el uso de Deep Learning con funciones de activación tanh en sus capas ocultas, buscando mejorar la capacidad del modelo para manejar patrones no lineales y distribuciones complejas. Como evidencia, entrega las matrices de confusión acumuladas a lo largo de las fases, mostrando visualmente el rendimiento de su sistema en la detección de fraudes.

#### Resumen de Información Entregada

- Empresa A: Proporciona los siguientes datos numéricos por intervalos acumulados (en miles).

**Tabla 29**

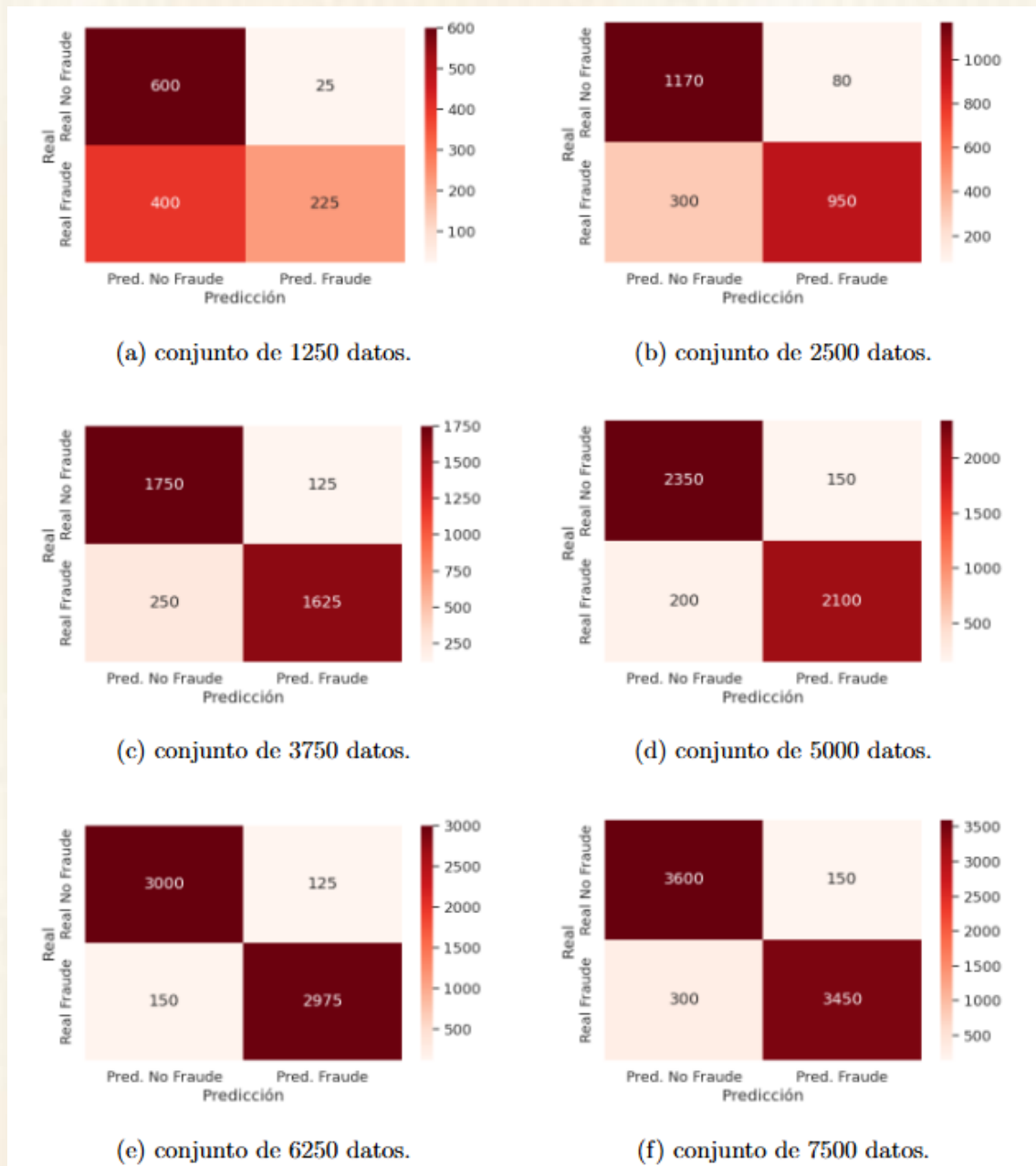
*Rendimiento acumulado por intervalo de datos*

| <b>Datos (x1000)</b> | <b>TP</b> | <b>FN</b> | <b>FP</b> | <b>TN</b> |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0                    | 0         | 0         | 0         | 0         |
| 0.5                  | 150       | 50        | 50        | 250       |
| 1.0                  | 300       | 100       | 100       | 500       |
| 1.5                  | 450       | 150       | 150       | 750       |
| 2.5                  | 750       | 250       | 250       | 1250      |
| 3.5                  | 1050      | 350       | 350       | 1750      |
| 4.5                  | 1350      | 450       | 450       | 2250      |
| 5.5                  | 1650      | 550       | 550       | 2750      |
| 6.5                  | 1950      | 650       | 650       | 3250      |
| 7.5                  | 3450      | 300       | 150       | 3600      |

- Empresa B: Presenta sus resultados a través de imágenes de matrices de confusión acumuladas.

**Figura 15:**

*Evolución de la Matriz de Confusión por Conjunto de Datos (Empresa B)*



Descargar las imágenes ampliadas de las matrices de confusión del Ejercicio Propuesto 4 (Empresa B) en la siguiente url: <https://github.com/carlosandrestamayo/anexos-libro-integracion-numerica-ABP/blob/main/imagenes/matrices%20de%20confusion%20ejercicio%20propuesto%204%20capitulo%204%20simpson%203-8.pdf>

## Solicitudes

En este ejercicio académico, dos grupos de estudiantes representan a las empresas en competencia. Como parte del compromiso por fomentar la participación femenina en las áreas STEM, cada equipo es liderado por una estudiante del curso. Esta dinámica busca fortalecer las habilidades de liderazgo, trabajo colaborativo, argumentación técnica y comunicación científica entre los participantes.

El Departamento de Seguridad Informática de la institución financiera solicita un informe técnico que permita fundamentar la mejor elección a partir de un análisis cuantitativo y cualitativo. Para esto, cada equipo representa a una empresa distinta, defendiendo su propuesta tecnológica con base en los resultados entregados.

- Empresa A: Presentará su análisis de los datos entregados (TP, FN, FP, TN) a partir del modelo basado en ReLU.
- Empresa B: Presentará su análisis de las matrices de confusión acumuladas del modelo basado en tanh.

Cada empresa desarrollará de forma independiente las siguientes actividades:

1. Analizar el problema y proponer un título técnico adecuado que refleje su contexto y su relación con la evaluación de sistemas de detección de fraudes bancarios mediante Deep Learning.
2. Desarrollar la solución del problema siguiendo esta estructura:
  - Contextualización del problema.

- Descripción y modelamiento matemático que justifique el uso del método asignado (cálculo de Recall acumulado e integración numérica).
  - Formulación de una pregunta problema clara y técnica.
3. Aplicar correctamente la Regla de Simpson 3/8 para estimar el Recall acumulado (%) por cada una de las propuestas, de acuerdo con la información suministrada.
4. Explicar de forma clara y precisa los conceptos fundamentales relacionados con los modelos de clasificación en inteligencia artificial:
- Significado de TP (True Positives), FP (False Positives), TN (True Negatives) y FN (False Negatives), y su representación en la matriz de confusión.
  - Definición, propósito y relevancia del Recall como métrica de evaluación.
  - Estructura de una red neuronal completamente conectada (fully connected) y la función de cada una de sus capas: entrada, ocultas y salida.
  - Función de activación: qué es y cuál es su propósito en el aprendizaje de redes neuronales.
5. Explicar brevemente las características técnicas de la solución asignada:
- Empresa A: Describir las características, ventajas y limitaciones del uso de redes neuronales y función de activación ReLU en modelos de clasificación para problemas de detección de fraude.
  - Empresa B: Describir las características, ventajas y limitaciones del uso de redes neuronales y función de activación tanh en modelos de clasificación para problemas de detección de fraude.
6. Reflexionar y responder: ¿Cómo contribuyen las soluciones de clasificación basadas en Deep Learning a la mejora de la detección de fraudes financieros y a la protección de los sistemas bancarios? Fundamente su respuesta considerando impactos técnicos, económicos y sociales.

## Entrega Final

Cada equipo deberá entregar un informe académico final, redactado de manera profesional bajo normas APA.

El informe debe incluir:

- Desarrollo completo de cada actividad asignada.
- Análisis individual y detallado de los resultados obtenidos por cada empresa.
- Presentar una defensa técnica y argumentada que sustente la superioridad de su modelo de clasificación, destacando sus ventajas y aportes frente a la propuesta rival.
- Inclusión de gráficas, tablas y representaciones visuales que respalden los análisis y resultados presentados.
- Elaboración de una presentación de diapositivas (slides) para la sustentación oral del proyecto, que sintetice de forma clara y profesional el proceso, los resultados y la conclusión.
- Referencias bibliográficas actualizadas y pertinentes que respalden las decisiones tomadas y los conceptos explicados.

Derechos de Autor (Copyright) 2025 © Carlos Andrés Tamayo Benjumea, © Juan Guillermo Calderón Acosta, © Lizeth Badillo Durán y © José Javier Coronel Casadiego

Este texto está protegido por una licencia Creative Commons 4.0.

Usted es libre de compartir, copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato, así como de adaptarlo, remezclarlo, transformarlo y crear a partir de él para cualquier propósito, incluso con fines comerciales. Sin embargo, debe cumplir con la condición de atribución, lo que significa que debe otorgar el crédito correspondiente a la obra original de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado modificaciones. Puede hacerlo en cualquier formato razonable, pero no de manera que sugiera que cuenta con el respaldo del licenciante o que recibe algún beneficio por el uso de la obra.

ISBN: 978-628-97230-0-7

<https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7.ch04>

**Cómo citar:** Tamayo Benjumea, C. A., Calderón Acosta, J. G., Badillo Durán, L., & Coronel Casadiego, J. J. (2025). Método de Simpson 3/8. In (Ed.), *Integración numérica con aprendizaje basado en problemas: teoría, ejercicios y aplicaciones en ingeniería* (pp. 81-109). Editorial PLAGCIS. <https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7.ch04>