

Capítulo 3

Método de Simpson 1/3

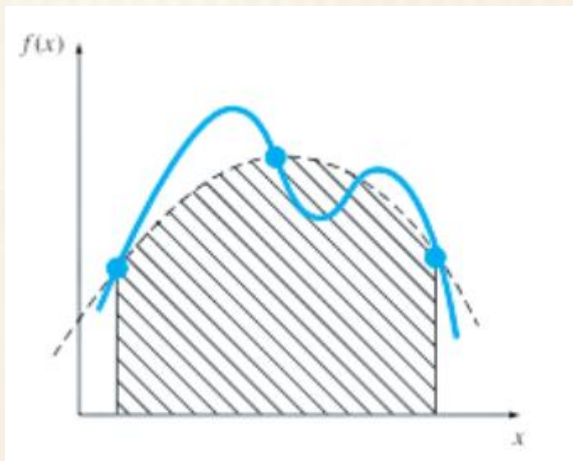
3.1. Fundamentos Teóricos

El método de Simpson 1/3 es una técnica de integración numérica más precisa que los métodos del rectángulo y del trapecio. Utiliza parábolas en lugar de segmentos rectos o áreas planas para aproximar el comportamiento de la función en subintervalos, logrando así una mejor estimación del área bajo la curva.

3.2. Representación Gráfica y Fórmula

Figura 6

Descripción Gráfica del Método de Simpson 3/8.



Para aproximar la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ mediante el método de Simpson 1/3, se sustituye la función $f(x)$ por un polinomio de segundo grado, dado que, como se observa en la gráfica, este método utiliza tres puntos ajustados a un polinomio cuadrático.

De aquí:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_2(x) dx$$

Considerando los puntos:

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$$

Haciendo $a = x_0, b = x_2$ y aplicando interpolación de Lagrange para el polinomio de segundo grado $f_2(x)$, se tiene que:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

El resultado de esta integral es:

$$I \approx \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)], \text{ siendo } \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Esta ecuación es la segunda fórmula de integración cerrada de Newton-Cotes. Otra forma de obtener dicha ecuación es integrando el polinomio de Newton-Gregory (Chapra & Canale, 2011, p. 559).

Para llegar a la forma extendida, se tiene que, como $n=2m$ subintervalos, hay m pares.

Denotando los nodos:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

Para cada par (x_{2j}, x_{2j+2}) , tenemos que:

$$\int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2j+2}]$$

Sumando sobre $j=0, \dots, m-1$, obtenemos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \sum_{j=0}^{m-1} [f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2j+2}]$$

Agrupando términos, teniendo en cuenta que:

- Los extremos f_0 y f_n aparecen una vez cada uno.
- Los nodos con índice impar aparecen 4 veces.
- Los nodos con índice par (interiores) aparecen 2 veces, excepto los extremos.

Nos queda:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

3.3. Error de Truncamiento

El error de truncamiento para el método de Simpson 1/3 viene dado por la fórmula.

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i)$$
$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{180n^5} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i)$$

donde $f^{(4)}(\xi_i)$ es la cuarta derivada de la función evaluada en un punto ξ_i , localizado en el segmento i . Este resultado se simplifica al estimar la media o valor promedio de la segunda derivada en todo el intervalo $[a, b]$.

Un análisis de esta fórmula nos revela que la regla de Simpson 1/3 es más exacta que la regla del trapecio, ya que no es proporcional a la segunda derivada sino a la cuarta, esto porque el término del coeficiente de tercer grado se hace cero durante la integración de la interpolación polinomial.

En consecuencia, como afirman Chapra & Canale (2011), “la regla de Simpson 1/3 alcanza una precisión de tercer grado aun cuando se basa en sólo tres puntos. En otras palabras, ¡da resultados exactos para polinomios cúbicos aun cuando se obtenga de una parábola!” (p. 559).

3.4. Ventajas

- Ofrece una mayor precisión que el método del trapecio al utilizar una interpolación cuadrática.

- Es exacto para polinomios de hasta tercer grado, incluso cuando se basa únicamente en tres puntos.
- El error de truncamiento está relacionado con la cuarta derivada, lo que lo hace más eficiente en funciones suaves.
- Permite obtener buenos resultados con menos subintervalos en comparación con otros métodos básicos.

3.5. Desventajas

- Requiere un número par de subintervalos (n par), lo que puede limitar su aplicación directa.
- Es más complejo que el método del trapecio, tanto en la deducción teórica como en la implementación.
- Si la función no es suficientemente suave (por ejemplo, presenta cambios abruptos en la cuarta derivada), el método puede perder precisión.

3.6. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\pi} (\sin x) dx$$

1. Resuelva la integral de forma analítica.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el método de simpson 1/3 para $n=4$ y $n=6$ subintervalos.
3. Calcule el error utilizando la fórmula.

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{180n^5} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i)$$

4. Utilice un redondeo de 4 decimales.
5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Solución Analítica

Figura 7

Área bajo la curva de $f(x)=\sin(x)$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$
$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos(\pi)] - [-\cos(0)] = -(-1) - (-1)$$
$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

Solución Numérica n=4

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x)=\sin x$
- Límite inferior: $a=0$
- Límite superior: $b=\pi$
- Número de subintervalos: $n=4$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Figura 8

Área bajo la curva de $f(x)=\sin(x)$

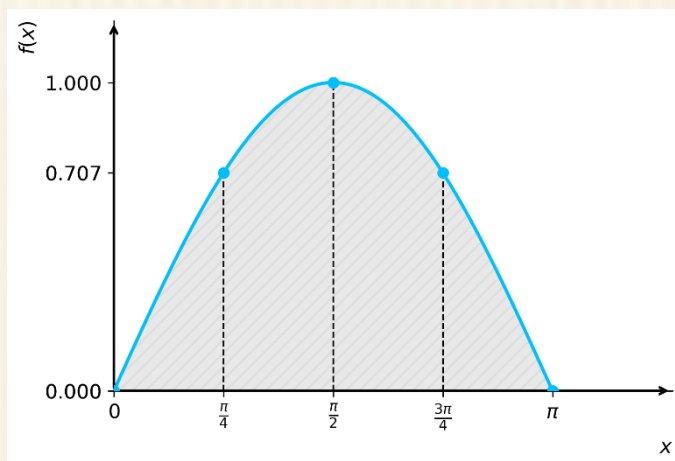


Tabla 11

Valores de $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0.0000
1	$\frac{\pi}{4}$	0.7071
2	$\frac{\pi}{2}$	1.0000
3	$\frac{3\pi}{4}$	0.7071
4	π	0.0000

Paso 5: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{3} [0.00 + 4(0.7071 + 0.7071) + 2(1.0000) + 0.00]$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx 2.0045$$

Solución Numérica n=6

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x)=\sin x$
- Límite inferior: $a=0$
- Límite superior: $b=\pi$
- Número de subintervalos: $n=6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi-0}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Figura 8:

Área bajo la curva de $f(x)=\sin(x)$

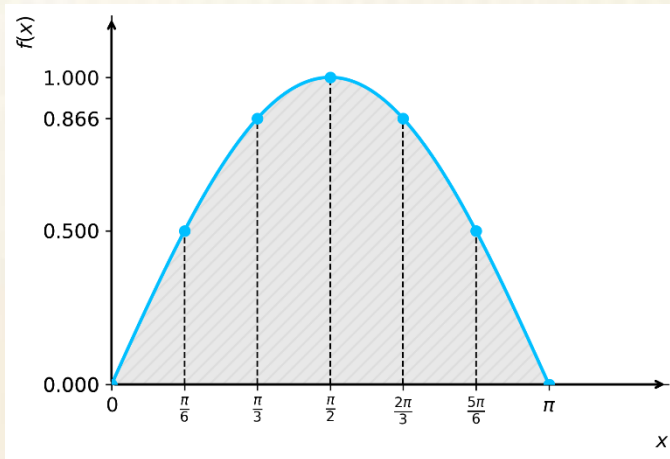


Tabla 12:

Valores de $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ con $n = 6$ subintervalos

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0.0000
1	$\frac{\pi}{6}$	0.5000
2	$\frac{\pi}{3}$	0.8660
3	$\frac{\pi}{2}$	1.0000
4	$\frac{2\pi}{3}$	0.8660
5	$\frac{5\pi}{6}$	0.5000
6	π	0.0000

Paso 3: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{6} [0.00 + 4(0.5000 + 1.0000 + 0.5000) + 2(0.8660 + 0.8660) + 0.00]$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx 2.0008$$

Cálculo del error

Información

- $f(x)=\sin x$
- $f^{(4)}(x)=\sin x$
- Límite inferior: $a=0$
- Límite superior: $b=\pi$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{180n^5} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i)$$

Para $n=4$

Tabla 13

$f^{(4)}(\xi_i)$, donde ξ_i es el punto medio de cada intervalo

i	ξ_i	$f^{(4)}(\xi_i)$
1	$\frac{\pi}{8}$	0.382683
2	$\frac{3\pi}{8}$	0.923880
3	$\frac{5\pi}{8}$	0.923880
4	$\frac{7\pi}{8}$	0.382683

$$\sum_{i=1}^4 f^{(4)}(\xi_i) = (0.382683) + (0.923880) + (0.923880) + (0.382683)$$

$$\sum_{i=1}^4 f^{(4)}(\xi_i) = 2.613126$$

$$E_T = -\frac{(\pi - 0)^5}{180 \cdot (4)^5} \cdot 2.613126 = -0.004338$$

Para $n=6$

$f^{(4)}(\xi_i)$, ξ_i donde es el punto medio de cada intervalo

$$\sum_{i=1}^6 f^{(4)}(\xi_i) = (0.258819) + (0.707107) + (0.965926) + (0.965926) \\ + (0.707107) + (0.258819)$$

$$\sum_{i=1}^6 f^{(4)}(\xi_i) = 3.863704$$

$$E_T = -\frac{(\pi - 0)^5}{180 \cdot (6)^5} \cdot 3.863704 = -0.000845$$

Análisis y conclusiones del resultado

- El signo negativo en el resultado de ambos errores indica que el valor aproximado del área bajo la curva resulta mayor que la integral exacta, es decir, la regla numérica produce una sobreestimación.
- Cuando se aumentó el número de intervalos se obtuvo una mejor aproximación al valor real y un menor error, dado que el error E_T es inversamente proporcional a la quinta potencia del número de subintervalos n .

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproximar el valor de la siguiente integral dada mediante la Regla de Simpson 1/3 con 6 subintervalos, redondeando los resultados a 6 decimales.

$$\int_{0.25}^1 -\ln(\cos(x)) dx$$

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x) = -\ln(\cos(x))$
- Límite inferior: $a = 0.25$
- Límite superior: $b = 1$
- Número de subintervalos: $n = 6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0.25}{6} = 0.125$$

Figura 9:

Área bajo la curva de $f(x)=-\ln(\cos x)$

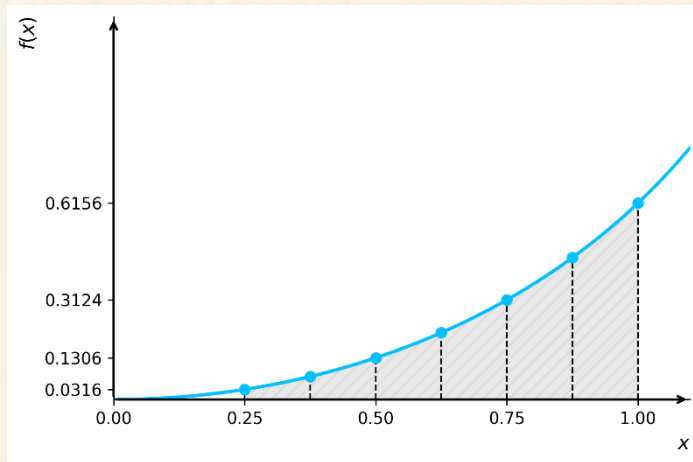


Tabla 14:

$$f(x) = -\ln(\cos(x))$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.2500	0.0316
1	0.3750	0.0720
2	0.5000	0.1306
3	0.6125	0.2006
4	0.7500	0.3124
5	0.8750	0.4447
6	1.0000	0.6156

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_{0.25}^1 -\ln(\cos(x)) dx \approx \frac{0.125}{3} [0.00 + 4(0.0720 + 0.2006 + 0.4447) + 2(0.1306 + 0.3124) + 0.6156]$$

$$\int_{0.25}^1 -\ln(\cos(x)) dx \approx 0.1821$$

Ejemplo 3

Estimación del costo de los cables de un puente colgante

Contextualización del problema

En ingeniería civil, el diseño de infraestructuras como puentes colgantes implica un análisis riguroso para garantizar la estabilidad, resistencia y seguridad estructural de las obras. En este tipo de estructuras, los cables que soportan el tablero del puente —la plataforma por donde circulan peatones y vehículos— son componentes fundamentales, ya que deben resistir las cargas previstas sin comprometer la integridad del sistema estructural. Para asegurar su correcto dimensionamiento, es necesario modelar matemáticamente la curvatura de los cables y calcular con precisión su longitud. Estos cálculos no sólo garantizan la seguridad del puente, sino que también permiten estimar los costos asociados a los materiales necesarios para su construcción.

Descripción y modelamiento del problema

La estudiante de Ingeniería Civil Laura Gómez, como parte de su proyecto de grado, desarrolla un estudio sobre el diseño estructural de un puente colgante rural que conectará los corregimientos de Puerto Mosquito y Bodega Central en el departamento del Cesar. Una de las tareas fundamentales de su proyecto es estimar la longitud de los cables necesarios para sostener el tablero del puente, garantizando tanto su seguridad como su viabilidad económica.

Para lograr este objetivo, Laura debe modelar matemáticamente la curvatura del cable, la cual ha sido determinada como una parábola que describe su forma geométrica. Dicha función está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$$

donde:

- x representa la posición horizontal (en metros) a lo largo del tablero del puente,
- $y(x)$ es la altura del cable con respecto al nivel base del tablero (en metros).

La distancia por evaluar esta entre los puntos $x=0$ y $x=6$ metros. Para calcular el presupuesto, se necesita estimar la longitud real del cable en esta sección.

La longitud de una curva definida por una función $y=f(x)$ se determina con la fórmula de longitud de arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Pregunta problema

¿Cuál es la longitud total aproximada del cable de suspensión requerida, incluyendo un 10% adicional como margen de seguridad para el empalme y anclaje? Además, ¿cuál sería el costo total de 6 tramos de dicho cable si el valor por metro es de \$250.000?

Requisitos o condiciones del problema

- Resolver la integral mediante el método de simpson 1/3.
- Dividir el intervalo en 6 subintervalos.
- Redondear los resultados a 4 cifras decimales.

Paso 1: Información del problema

- Función: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- Límite inferior: $a=0$
- Límite superior: $b=6$
- Número de subintervalos: $n=6$
- Número de decimales: 4
- $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$

Solución numérica

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) = \frac{1}{2}x$$

Longitud de la curva:

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} dx = \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2} dx$$

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{6 - 0}{6} = 1$$

Tabla 15

Valores de $f(x)$ para el cálculo de la longitud de curva

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2}$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1.0000
1	1	1.1180
2	2	1.4142
3	3	1.8028
4	4	2.2361
5	5	2.6926
6	6	3.1623

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2} dx \approx \frac{1.00}{3} [1.00 + 4(1.1180 + 1.8028 + 2.6926) + 2(1.4142 + 2.2361) + 3.1623]$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2} dx \approx 11.3055 \text{ m}$$

Para 6 tramos de cable con el 10% adicional se tiene:

$$L_t = (11.3055 \text{ m}) \cdot (1.1) \cdot (6) \approx 74.6163 \text{ m}$$

$$C = (74.6163) \cdot (250000) = \$ 18.654.075$$

Análisis y conclusiones de los resultados

Inicialmente en la solución de este problema se halló la derivada de la función de la forma geométrica del cable, para poder reemplazarla en la fórmula de la distancia de una curva.

Seguidamente se calculó la integral con el método de Simpson 1/3 con seis (6) subintervalos, redondeando los resultados a cuatro (4) decimales.

A esta distancia calculada se le adiciono el 10% como margen de seguridad exigido por las condiciones del problema, dando un total de 74.6163 m para los 6 tramos, y un costo total de 18.654.075

Ejemplo 4

Estimación de la probabilidad de incumplimiento en el peso de productos

Contextualización del problema.

Una investigación realizada por la Confederación Colombiana de Consumidores (CCC) ha descubierto que el peso real de los paquetes de azúcar de 5kg comercializados en tiendas y supermercados del país es inferior al peso oficial declarado en el empaque, generando un posible incumplimiento y afectación a los consumidores.

Como no es viable pesar todos los paquetes existentes en los puntos de venta, la CCC contrató un grupo experto en estadística de la Universidad Popular del Cesar seccional Aguachica, para determinar la cantidad de paquetes que no cumplen con las especificaciones del peso.

Descripción y modelamiento del problema

El grupo de estudio tomó una muestra aleatoria de 100 paquetes del producto para analizarlos, y encontró que el comportamiento estadístico del peso sigue una distribución normal estandarizada.

Basado en esto decide utilizar la siguiente función para calcular la probabilidad de que un paquete seleccionado al azar pese menos de 5kg.

$$P(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0.8} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Donde:

- La constante 0.5 representa la probabilidad acumulada hasta la media en una distribución normal simétrica.
- El valor 0.8 representa la desviación estándar estandarizada ($z=0.8$) por debajo de la media, correspondiente al peso de 5kg.
- La integral evalúa la acumulación de probabilidad desde la media hasta dicho valor.

Pregunta problema

¿Cuál es la probabilidad de que un paquete de azúcar vendido en un supermercado pese menos de 5kg?

Requisitos o condiciones del problema

- Aplicar el método de integración numérica de Simpson 1/3 para aproximar el valor de la integral.
- Utilizar 8 subintervalos.
- Presentar el resultado con 4 cifras decimales.

Paso 1: Información del problema

- Función: $P(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0.8} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$
- Límite inferior: $a=0$
- Límite superior: $b=0.8$
- Número de subintervalos: $n=8$
- Número de decimales: 4

Solución numérica

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{0.8 - 0}{8} = 0.10$$

Tabla 16

Valores de la función gaussiana

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.00	1.0000
1	0.10	0.9900
2	0.20	0.9608
3	0.30	0.9139
4	0.40	0.8521
5	0.50	0.7788
6	0.60	0.6977
7	0.70	0.6126
8	0.80	0.5273

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$I = \int_0^{0.8} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \approx \frac{0.10}{3} [1.00 + 4(0.9900 + 0.9139 + 0.7788 + 0.6126) \\ 2(0.9608 + 0.8521 + 0.6977) + 0.5273]$$

$$I \approx 0.6577$$

$$P(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot I$$

$$P(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (0.6577) = 0.7624$$

Análisis y conclusiones de los resultados

- Para la solución de este problema primero se calculó la integral definida entre 0 y 0.8 que hace parte de la función de la probabilidad, mediante el método de Simpson 1/3 usando un redondeo a cuatro (4) decimales y ocho (8) subintervalos

- Seguidamente se calculó la probabilidad con la función dada obteniendo un valor de 0.7624, es decir 76.24 %.
- Dada la probabilidad obtenida 76.24% se puede concluir que hay una alta irregularidad en el proceso de pesado y empaçado de los paquetes de azúcar.

3.7 Ejemplos Propuestos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

1. Resuelva la integral de forma analítica.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el método de simpson 1/3 para $n=4$ y $n=6$ subintervalos.
3. Calcule el error utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad \text{donde } \xi \in (a, b)$$

4. Utilice un redondeo de 4 decimales.
5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproximar el valor de la siguiente integral dada mediante la Regla de Simpson 1/3 con 6 subintervalos, redondeando los resultados a 4 decimales.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x^2) dx$$

Ejemplo 3

El Grupo de Investigación en Procesamiento del Lenguaje Natural e Inteligencia Artificial (GIPLIA) de la Universidad del Nuevo Sur (UNS) está realizando un

ejercicio de simulación para evaluar el posible consumo económico asociado al desarrollo de una plataforma educativa que haga uso de APIs comerciales de modelos de lenguaje LLM (Large Language Model).

Con el fin de estimar el costo acumulado por consumo de tokens, el grupo ha recolectado datos simulados que representan el comportamiento esperado del sistema a lo largo de una jornada de 8 horas de funcionamiento continuo.

El costo total acumulado en dólares se modela mediante la siguiente integral:

$$C = k \cdot \int_{t_0}^{t_f} N(t) dt$$

Donde:

- C = Costo total en dólares (USD).
- $k=0.0025$ (USD/hora)
- $N(t)$ = Tokens consumidos por hora.
- t = Tiempo (en horas).

Los datos contenidos en la siguiente tabla no provienen de un sistema en producción, sino de un ejercicio experimental que busca aproximar, de manera razonable, la carga de trabajo que implicaría para la API de un proveedor LLM en condiciones de uso académico.

Tabla 17

Tokens por hora simulados

Tiempo (h)	Tokens por hora
0	750
1	900
2	1100
3	1350
4	1500
5	1400
6	1200
7	950
8	800

1. Analice el problema presentado y proponga un título técnico adecuado que refleje claramente su contexto, propósito y el área de conocimiento al que pertenece.
2. Desarrolle la solución de este problema siguiendo la estructura:
 - Contextualización del Problema.
 - Descripción y modelamiento del problema.
 - Pregunta problema.
3. Estime mediante la regla de Simpson 1/3 la cantidad total de tokens consumidos durante la prueba.
4. Calcule el costo total en pesos colombianos (COP) de los tokens utilizados durante la jornada simulada.
5. Explique brevemente: ¿Por qué es importante que un grupo de investigación como GIPLIA tenga claridad sobre estos costos en proyectos que dependen de servicios comerciales de APIs para modelos LLM?

Ejemplo 4

La empresa EnerBioTech S.A.S., dedicada a soluciones sostenibles para el sector agroindustrial, se encuentra en proceso de definir qué sistema fotovoltaico instalar para abastecer energéticamente su planta de procesamiento.

Tras evaluar propuestas comerciales, ha recibido dos ofertas distintas que deben ser analizadas a nivel técnico y económico para tomar la mejor decisión.

Información Técnica Suministrada por los Proveedores Empresa A Solución:

Panel Solar Fijo

La Empresa A ha suministrado dos modelos teóricos para representar el comportamiento de la irradiancia solar a lo largo del día. Estas funciones, expresadas en unidades de W/m^2 , están definidas para dos intervalos de tiempo diferenciados. A continuación, se describen las características de cada modelo:

1. Primer intervalo: 5:00 a.m. – 11:00 a.m.

- Modelo matemático:

$$I_1(t) = 600 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

- Descripción: Esta función modela el incremento progresivo de la irradiancia solar desde el amanecer hasta el mediodía, reflejando el aumento natural de la radiación solar durante las primeras horas del día.

2. Segundo intervalo: 11:00 a.m. – 5:00 p.m.

- Modelo matemático:

$$I_2(t) = 300 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi(t-3)}{6}\right)\right)$$

- Descripción: Esta función modela la disminución progresiva de la irradiancia solar a partir del mediodía, simulando el descenso de la radiación conforme avanza la tarde.

Empresa B

- Solución: Panel Solar con Seguimiento Solar (Eje Único)

La Empresa B ha entregado datos experimentales de irradiancia solar medidos en campo de irradiancia solar a lo largo del día, expresados en unidades de W/m^2 . Dichos datos corresponden a un sistema de seguimiento solar de un solo eje, diseñado para optimizar la captación de radiación durante todo el periodo de exposición solar.

Tabla 18

Irradiancia solar horaria

Hora	Irradiancia
5:00 a.m.	0
6:00 a.m.	80
7:00 a.m.	150
8:00 a.m.	230

Hora	Irradiancia
9:00 a.m.	300
10:00 a.m.	360
11:00 a.m.	400
11:30 a.m.	420
12:00 p.m.	440
12:30 p.m.	460

Tabla 19*Irradiancia solar horaria*

Hora	Irradiancia
1:00 p.m.	480
1:30 p.m.	490
2:00 p.m.	495
2:30 p.m.	500
3:00 p.m.	480
3:30 p.m.	470
4:00 p.m.	460
4:30 p.m.	455
5:00 p.m.	450

Los datos reflejan las mediciones reales de irradiancia registradas por el sistema de seguimiento solar durante la jornada de 5:00 am a 5:00 pm, evidenciando cómo esta tecnología optimiza la captación de radiación mediante el ajuste de la orientación del panel.

Solicitudes

La gerencia de la empresa solicita un informe técnico que permita fundamentar la mejor elección a partir de un análisis cuantitativo y cualitativo. Para esto el equipo de ingenieros se dividirá en dos subgrupos de trabajo, cada uno responsable de analizar una de las dos propuestas tecnológicas presentadas por las empresas proveedoras.

El trabajo debe desarrollarse de manera cooperativa bajo la siguiente estructura:

- Subgrupo 1: Analizará la propuesta de la Empresa A (Panel Solar Fijo).
- Subgrupo 2: Analizará la propuesta de la Empresa B (Panel Solar con Seguimiento Solar).

Cada subgrupo desarrollará de forma independiente las siguientes actividades:

1. Analizar el problema y proponer un título técnico adecuado que refleje su contexto y su relación con la evaluación de sistemas de generación de energía solar.
2. Desarrollar la solución del problema siguiendo esta estructura:
 - Contextualización del problema.
 - Descripción y modelamiento matemático que justifique el uso del método asignado (integración numérica).
 - Formulación de una pregunta problema clara y técnica.
3. Aplicar correctamente la Regla de Simpson 1/3 para estimar la energía total generada (Wh/m^2) por cada una de las propuestas, de acuerdo con la información suministrada.
4. Explicar brevemente las características técnicas de la solución asignada:
 - Subgrupo 1: Describir las características, ventajas y limitaciones del sistema de panel solar fijo, en términos de eficiencia, costos y sostenibilidad.
 - Subgrupo 2: Describir las características, ventajas y limitaciones del sistema de panel solar con seguimiento, resaltando su capacidad de optimizar la captación de energía a lo largo del día.
5. Reflexionar y responder: ¿Cómo contribuyen las soluciones de energía fotovoltaica al desarrollo sostenible, la eficiencia energética y la reducción de los costos operativos en empresas agroindustriales? Fundamente su respuesta considerando impactos ambientales, económicos y tecnológicos.

Trabajo conjunto del grupo completo:

Comparar las energías aproximadas obtenidas para cada tecnología y, de manera consensuada, seleccionar la alternativa más conveniente. Esta decisión debe estar fundamentada en criterios de eficiencia, simplicidad de operación, sostenibilidad, retorno de inversión y mayor aprovechamiento de la irradiación solar. La elección debe ser respaldada con evidencia numérica, técnica y referencias pertinentes que demuestren su viabilidad económica y técnica.

Entrega Final

El grupo deberá entregar un informe académico final, redactado de manera profesional bajo normas APA. El informe debe incluir:

- Desarrollo completo de cada actividad asignada a los subgrupos.
- Comparación y análisis conjunto de los resultados obtenidos.
- Argumentación técnica y fundamentada de la elección del sistema seleccionado.
- Inclusión de gráficas, tablas y representaciones visuales que respalden los análisis y resultados presentados.
- Elaboración de una presentación de diapositivas (slides) para la sustentación oral del proyecto, que sintetice de forma clara y profesional el proceso, los resultados y la conclusión.
- Referencias bibliográficas actualizadas y pertinentes que respalden las decisiones tomadas y los conceptos explicados

Derechos de Autor (Copyright) 2025 © Carlos Andrés Tamayo Benjumea, © Juan Guillermo Calderón Acosta, © Lizeth Badillo Durán y © José Javier Coronel Casadiego

Este texto está protegido por una licencia Creative Commons 4.0.

Usted es libre de compartir, copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato, así como de adaptarlo, remezclarlo, transformarlo y crear a partir de él para cualquier propósito, incluso con fines comerciales. Sin embargo, debe cumplir con la condición de atribución, lo que significa que debe otorgar el crédito correspondiente a la obra original de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado modificaciones. Puede hacerlo en cualquier formato razonable, pero no de manera que sugiera que cuenta con el respaldo del licenciante o que recibe algún beneficio por el uso de la obra.

ISBN: 978-628-97230-0-7

<https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7.ch03>

Cómo citar: Tamayo Benjumea, C. A., Calderón Acosta, J. G., Badillo Durán, L., & Coronel Casadiego, J. J. (2025). Método de Simpson 1/3. In (Ed.), *Integración numérica con aprendizaje basado en problemas: teoría, ejercicios y aplicaciones en ingeniería* (pp. 56-80). Editorial PLAGCIS. <https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7.ch03>