https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7

Capítulo 2

Regla del Trapecio

2.1. Fundamentos Teóricos

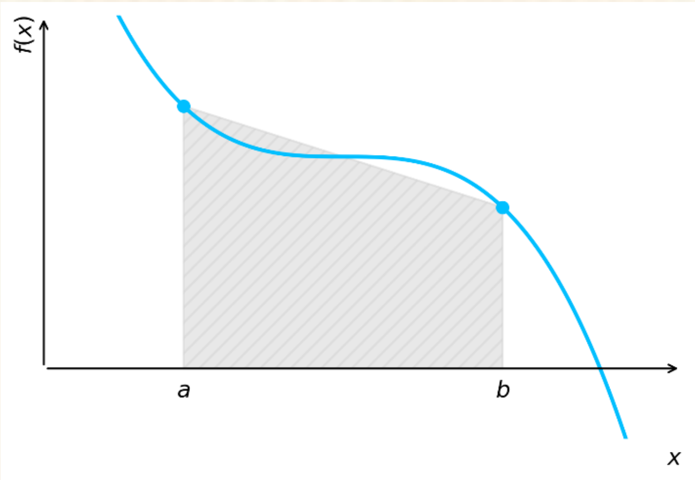
La regla del trapecio es una técnica de integración numérica que mejora la aproximación del área bajo la curva al reemplazar los rectángulos por trapecios. Cada trapecio tiene como base el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y lados no verticales definidos por los valores de la función en los extremos $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$.

Esta regla consiste en dividir el intervalo de integración en n subintervalos y aproximar el área de cada uno por la del trapecio entre los puntos de las abscisas y las ordenadas de la función evaluada en esos valores.

2.2. Representación Gráfica y Fórmulas

Figura 1

Descripción Gráfica de la Regla del Trapecio



De las fórmulas de Newton-Cotes, se tiene que para la regla trapezoidal:

$$I = \int_a^b f\,(x)\,dx \approx \int_a^b f_1\,(x)\,dx$$

y dado que:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

El área bajo la línea recta que representa el polinomio de primer grado es una aproximación de la integral de f(x) entre los límites a y b, es decir:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right] dx$$

La aproximación numérica en su forma compacta y expandida están dadas por:

$$I = \int_a^b f\,(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\,(x_i) + f(x_n)\right] \text{(Forma compacta)}$$

$$I = \int_a^b f\,(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \text{(Forma expandida)}$$

donde:

- n: número de subintervalos
- $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- $x_i = a + i \cdot \Delta x$

Según Chapra y Canale (2011), "geométricamente, la regla del trapecio es equivalente a aproximar el área del trapecio bajo la línea recta que une f(a) y f(b)" (p. 550).

Para el uso o aplicación de este método, es fundamental lo que afirman Burden & Faires (2011) El método del trapecio proporciona una manera sencilla de aproximar integrales definidas, pero su precisión depende críticamente de la suavidad de la función y del número de particiones usadas.

2.3. Error de Truncamiento

Al calcular la integral bajo un segmento de línea recta para aproximar el área bajo una curva es importante tener en cuenta que siempre existe un error asociado al resultado, el cual depende de la forma de la función y del tamaño del intervalo. considerado, y puede estimarse utilizando las siguientes expresiones:

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

donde $f''(\xi_i)$ es la segunda derivada en un punto ξ_i, localizado en el segmento i. Este resultado se simplifica al estimar la media o valor promedio de la segunda derivada en todo el intervalo $[a, b]$.

2.4. Ventajas

- Es uno de los métodos más sencillos de realizar.

- Obtiene aproximaciones más exactas si la función es continua y suave, es decir, no presenta cambios bruscos.

- Su implementación computacional requiere de bajo costo de procesamiento.

2.5. Desventajas

- Para aumentar la precisión requiere incrementar la cantidad de subintervalos(trapecios), lo que eleva el esfuerzo de cálculo.

- La fórmula de error depende de la segunda derivada de la función. Si esta es grande o cambia mucho, el error puede ser significativo.

2.6. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_{1}^{3} (x^2 + 3x)\, dx$$

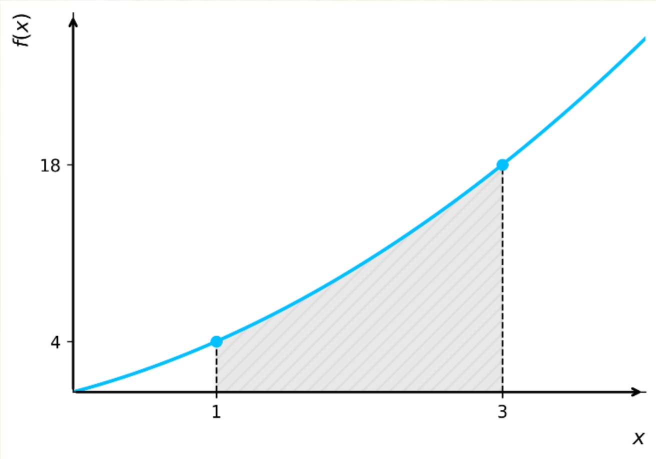
1. Resuelva la integral de forma analítica.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el método del trapecio para n=4 y n=8 subintervalos.
3. Utilice un redondeo de 4 decimales.
4. Calcule el error utilizando la fórmula.
5. $E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$
6. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Solución Analítica

https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7

Figura 2

Área bajo la curva de $f(x) = x^2 + 3x$



$$\int_1^3 (x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{1}{3}(3)^3 + \frac{3}{2}(3)^2\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2\right] = \frac{45}{2} - \frac{11}{6}$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x)\,dx = \frac{62}{3} = 20.6667$$

Solución Numérica n=4

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x) = x^2 + 3x$
- Límite inferior: a=1
- Límite superior: b=3
- Número de subintervalos: n=4
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5000$$

Figura 3

Área bajo la curva de $f(x) = x^2 + 3x$

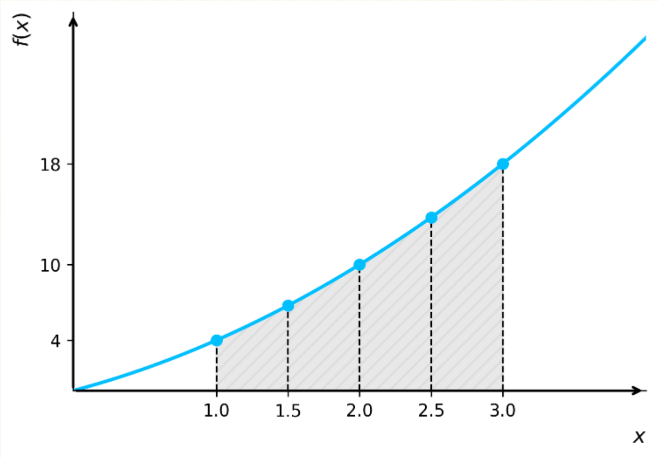


Tabla 1

Datos tabulados para la aplicación del método del trapecio

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.0	4.00
1	1.5	6.75
2	2.0	10.00
3	2.5	13.75
4	3.0	18.00

Paso 3: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x)\,dx \approx \frac{0.50}{2}[4.00 + 2(6.75 + 10.00 + 13.75) + 18.00]$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x)\,dx \approx 20.7500$$

Solución Numérica n=8

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x) = x^2 + 3x$
- Límite inferior: a=1
- Límite superior: b=3
- Número de subintervalos: n=8
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{8} = 0.25$$

Figura 4

Área bajo la curva de $f(x) = x^2 + 3x$

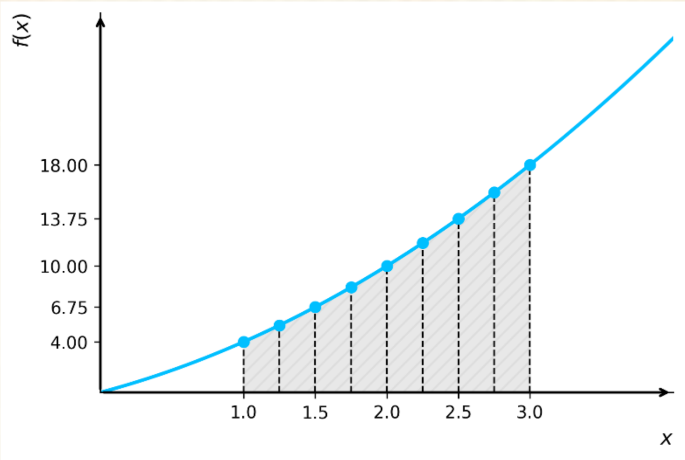


Tabla 2

Resultados de $f(x)$ en puntos equidistantes

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.00	4.0000
1	1.25	5.3125
2	1.50	6.7500
3	1.75	8.3125
4	2.00	10.0000
5	2.25	11.8125
6	2.50	13.7500

i	x_i	$f(x_i)$
7	2.75	15.8125
8	3.00	18.0000

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x)\,dx \approx \frac{0.25}{2}[4.0000 + 2(5.3125 + 6.7500 + 8.3125$$
$$+10.0000 + 11.8125 + 13.7500 + 15.8125) + 18.000]$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x)\,dx \approx 20.6876$$

Cálculo del error

Información

- $f(x) = x^2 + 3x$ f^″ (x)=2
- Límite inferior: a=1
- Límite superior: b=3

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

Para n=4

$$\sum_{i=1}^{4} f''(\xi_i) = (2) + (2) + (2) + (2) = 8$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{(3-1)^3}{12\cdot(4)^3}\cdot 8 = -0.0833$$

Para n=8

$$\sum_{i=1}^{8} f''(\xi_i) = (2) + (2) + (2) + (2) + (2) + (2) + (2) + (2) = 16$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{(3-1)^3}{12\cdot(8)^3}\cdot 16 = -0.0208$$

Análisis y Conclusiones del Resultado

- El signo negativo del resultado del error indica que el valor aproximado (área bajo la curva) es mayor al valor real de la integral, es decir, el área es sobrestimada.
- Cuando se aumentó el número de intervalos se obtuvo una mejor aproximación al valor real, por ende, un error menor, dado que el error E_T es inversamente proporcional al cubo del número de subintervalos n.
- El error obtenido para n=4 es aproximadamente del 8% y para n=8 es del 2%, lo que es bastante aceptable, dado que es cercano a 0.

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

1. Aproxime el valor de la integral utilizando el método del trapecio para $n = 4$ subintervalos.
2. Utilice un redondeo de 6 decimales.
3. Calcule el error utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

4. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo?

Solución Numérica

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x) = e^{-x^2}$
- Límite inferior: a=0
- Límite superior: b=1
- Número de subintervalos: n=4
- Número de decimales: 6

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

Figura 5

Área bajo la curva de $f(x) = e^{-x^2}$.

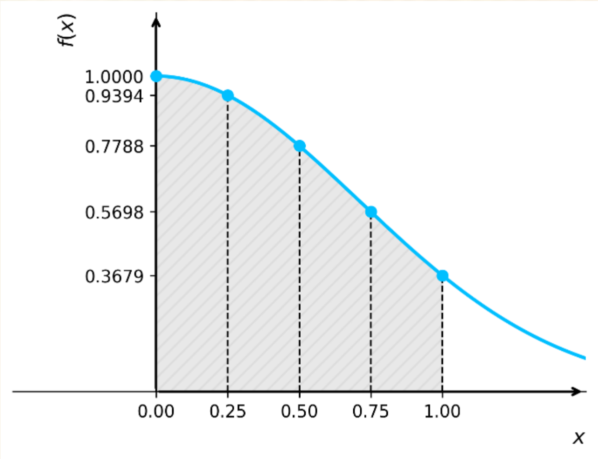


Tabla 3

Valores de $f(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo [0, 1]

$f(x) = e^{-x^2}$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.00	1.000000
1	0.25	0.939413
2	0.50	0.778801
3	0.75	0.569783
4	1.00	0.367879

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$\int_0^1 (e^{-x^2})\,dx \approx \frac{0.25}{2}[1.000000 + 2(0.939413 + 0.778801 + 0.569783) + 0.367879]$$

$$\int_0^1 (e^{-x^2})\,dx \approx 0.742984$$

Cálculo del error

Información

- $f(x) = e^{-x^2}$
- $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$

- Límite inferior: a=0
- Límite superior: b=1

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''\,(\xi_i)$$

Tabla 4

Valores de $f''(\xi_i)$en los puntos medios de los subintervalos

f^″ (ξ), donde ξ es el punto medio de cada intervalo

i	ξ_i	$f''(\xi_i)$
1	0.125	-1.907462
2	0.375	-1.248922
3	0.625	-0.296027
4	0.875	0.494108

$$\sum_{i=1}^{4} f''\,(\xi_i) = (-1.907462) + (-1.248922) + (-0.296027) + (0.494108)$$

$$\sum_{i=1}^{4} f''\,(\xi_i) = -2.958303$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''\,(\xi_i) = -\frac{(1-0)^3}{12\cdot(4)^3}\cdot(-2.958303) = 0.003852$$

Análisis y conclusiones del resultado

- El signo positivo del resultado del error indica que el valor aproximado (área bajo la curva) es menor al valor real de la integral, es decir, el área es subestimada.
- El error obtenido es bastante aceptable, dado que es cercano a 0 e indica que el método puede ser utilizado en aproximaciones de este tipo de curvas.

Ejemplo 3

Control térmico en proceso de pasteurización

Contextualización del problema

El control térmico es un aspecto fundamental en los procesos agroindustriales dedicados a la producción de alimentos, ya que permite garantizar la seguridad e inocuidad de los productos mediante la eliminación de microorganismos patógenos, sin comprometer su calidad. En particular, la pasteurización es una técnica ampliamente utilizada en la industria láctea para prolongar la vida útil de la leche y sus derivados, asegurando que cumplan con los estándares sanitarios establecidos por la normatividad vigente.

Dentro de los métodos existentes, el proceso LTLT (Low Temperature Long Time) constituye una alternativa efectiva para pequeñas y medianas plantas agroindustriales, ya que consiste en mantener la leche a temperaturas moderadas durante períodos prolongados, reduciendo riesgos sin alterar sus propiedades organolépticas.

Descripción y modelamiento del problema

La ingeniera agroindustrial Diana López, especialista en procesos térmicos aplicados a la industria de alimentos, lidera un proyecto de mejora continua en la planta agroindustrial Freska Leche. Su objetivo es optimizar el proceso de pasteurización mediante un control preciso de la temperatura, garantizando la eliminación de patógenos sin afectar la calidad del producto.

Durante la etapa de pasteurización, se aplica el método LTLT, que exige mantener la leche a una temperatura constante durante 30 minutos. En este caso particular, se requiere analizar la variación de la temperatura en un tanque de leche a lo largo del tiempo para estimar la energía térmica necesaria durante todo el proceso.

La temperatura en función del tiempo durante el proceso se modela mediante la función:

$$T(t) = 20 + 15\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$$

donde:

- T(t) es la temperatura en grados Celsius,
- t es el tiempo en minutos.

El objetivo es calcular la energía térmica total requerida Q durante el proceso de pasteurización. Inicialmente se debe calcular la energía acumulada en el tiempo E_t, la cual se calcula con la siguiente expresión:

$$E_t = m \cdot c \cdot \left(\int_{t_0}^{t_1} T\,(t)\,dt \right)$$

Considerando los siguientes datos:

- Masa de leche: $m = 100\,\mathrm{kg}$
- Calor específico de la leche: $c = 3900\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C\,)}$

En caso de presentarse un corte de energía eléctrica, la planta debe tener un generador de respaldo que pueda suministrar energía a los equipos involucrados en el proceso de pasteurización. Los ingenieros encargados han decidido el uso de un sistema de alimentación ininterrumpida (UPS: Uninterruptible Power Supply). que son baterías que proporcionan energía instantánea por un corto período de tiempo, estas pueden suministrar energía durante las interrupciones.

Pregunta problema

¿Qué capacidad mínima de vatios (W) debe tener la UPS para garantizar el proceso de pasteurización durante 30 minutos, considerando un margen de seguridad del 10% sobre la potencia calculada?

Requisitos o condiciones del problema

- Utilizar el método del trapecio para calcular la energía total acumulada E_t.
- Evaluar la función en 5 subintervalos equidistantes.
- Los resultados deben presentarse con un redondeo de 4 cifras decimales.

Paso 1: Información del problema

- Función: f(t)=20+15cos$\left(\frac{\pi t}{10}\right)$
- Límite inferior: a=0
- Límite superior: b=30
- Número de subintervalos: n=5
- Número de decimales: 4

https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b-a}{n} = \frac{30-0}{5} = 6.0000$$

Tabla 5

Valores de $f(t) = 20 + 15cos\,(\frac{\pi t}{10})$en función del tiempo t_i

f(t)=20+15cos$\left(\frac{\pi t}{10}\right)$

i	t_i	$f(t_i)$
0	0.0	35.0000
1	6.0	15.3647
2	12.0	7.8647
3	18.0	32.1353
4	24.0	24.6353
5	30.0	5.0000

Paso 3: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta

$$\int_a^b f\,(t)\,dt \approx \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\,(t_i) + f(t_n)\right]$$

$$\int_0^{30}\left(20 + 15\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)\right)dt \approx \frac{6.0}{2}[35.0000 + 2(15.3647 + 7.8647$$
$$+32.1353 + 24.6353) + 5.0000]$$

$$\int_0^{30}\left(20 + 15\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)\right)dt \approx 600\,{}^\circ\mathrm{C}\cdot min$$

$$E_t = m\cdot c\cdot\left(\int_0^{30} T\,(t)\,dt\right)$$

$$E_t = (100\,\mathrm{kg})\cdot(3900\,\mathrm{J}/(\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}))\cdot(600\,{}^\circ\mathrm{C}\cdot min) = 234.000.000\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{min}$$

Para calcular la potencia, se necesita obtener la energía total necesaria, la cual se obtiene mediante la expresión.

$$Q = \frac{E_t}{\Delta t} = \frac{234.000.000}{30} = 7.800.000\,J$$

Dado que la potencia es igual a energía sobre tiempo, y se requiere que sea en vatios (W), es necesario convertir los minutos en segundos, es decir:

$$P = \frac{Q}{\Delta} = \frac{7.800.000}{1800} = 4333.3333\,W$$

La potencia mínima calculada fue:

$$P = 4333.3333\ \mathrm{W}$$

Considerando un margen de seguridad del 10%:

$$P_{\text{segura}} = P \cdot (1 + 0.10) = 4333.3333 \cdot 1.10 = 4766.6667\ \mathrm{W}$$

Análisis y conclusiones del resultado

- En este problema primeramente se calculó la energía acumulada en el tiempo mediante el método de integración del trapecio y con esta información se obtuvo la energía y luego la potencia necesaria.
- La UPS necesaria para garantizar la energía en el proceso de pasteurización es de 4333.3333 W. Sin embargo, como se solicita adicionar un margen de seguridad del 10% de la potencia, para eso se requiere una UPS con una capacidad mínima de al menos 4767 W o aproximadamente 4.8 kW.

Ejemplo 4

Estimación del espacio recorrido por un dron de fumigación

Contextualización del problema

En los procesos agroindustriales, la optimización en la aplicación de agroquímicos es un factor crítico para la rentabilidad y la sostenibilidad de los cultivos. Los drones de fumigación se han convertido en una herramienta necesaria para esta labor, permitiendo una aplicación precisa y eficiente.

Descripción y modelamiento del problema

Durante una prueba de vuelo automatizado, se registraron datos de velocidad de un dron en función del tiempo, mostrados en la siguiente tabla:

Tabla 6

Velocidad del dron vs. tiempo

Tiempo	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Velocidad	3.2	3.5	6.8	4.6	6.1	7.7	8.1	9.0	9.3	9.9

donde:

- v(t) es la velocidad en metros por segundo (m/s),
- t representa el tiempo en segundos.

Sabemos que la velocidad es la razón de cambio (derivada) del espacio con respecto al tiempo, es decir:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \rightarrow \quad \int v(t)\,dt = \int ds \rightarrow \quad s(t) = \int_{t_0}^{t_n} v\,(t)\,dt$$

Donde s(t) es la distancia total recorrida en un tiempo t.

Dada la tabla de datos de velocidad en función del tiempo, El objetivo es calcular la distancia total recorrido por el dron, y como no se cuenta con una función explícita de velocidad v(t), sino con los valores de velocidad para subintervalos iguales de tiempo t, se debe utilizar la integración numérica.

Pregunta problema ¿Con que cantidad exacta de plaguicida se debe equipar el dron para realizar el recorrido obtenido; sabiendo que para cubrir una hectárea (ha) el dron realiza un recorrido lineal de 1400 mt y se necesitan 12 lt/ha?

Requisitos o condiciones del problema

- Utilizar el método del trapecio para estimar la integral.
- Los resultados deben presentarse con un redondeo de 4 cifras decimales.

Paso 1: Información del problema

- Límite inferior: $a = 10$
- Límite superior: $b = 100$
- Número de subintervalos: $n = 9$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b-a}{n} = \frac{100-10}{9} = 10$$

Tabla 7:

Valores tabulados de f(t_i)

i	t_i	$f(t_i)$
0	10	3.2
1	20	3.5
2	30	6.8
3	40	4.6
4	50	6.1
5	60	7.7
6	70	8.1
7	80	9.0
8	90	9.3
9	100	9.9

Paso 3: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + f(t_n)\right]$$

$$s(t) \approx \int_{10}^{100} v(t)\,dt \approx \frac{10}{2}[3.2 + 2(3.5 + 6.8 + 4.6 + 6.1$$
$$+7.7 + 8.1 + 9.0 + 9.3) + 9.9]$$

$$s(t) \approx \int_0^{100} v(t)\,dt \approx 616.5\,mt$$

$$\text{Litros necesarios} = \frac{616.5 \cdot 12}{1400} = \frac{7398}{1400} \approx 5.2843 \text{ litros}$$

Análisis y conclusiones del resultado

En este problema se encontró el área bajo la curva utilizando datos tabulados, teniendo en cuenta que la distancia entre los datos de la variable independiente t debe ser igual, para poder utilizar la integración numérica.

Después de encontrar la distancia recorrida, se aplicó una regla de tres simple para calcular la cantidad en litros de plaguicida con que debe equiparse el dron para fumigar la distancia recorrida.

El dron debe ser equipado con aproximadamente 5.2843 litros de plaguicida para realizar el recorrido estimado de 616.5000 metros, garantizando una aplicación eficiente y precisa sobre el cultivo.

2.7 Ejemplos Propuestos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^2 2\,x \cdot \cos(x^2)\,dx$$

1. Resuelva la integral de forma analítica.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el método del trapecio para $n = 4$ y $n = 8$ subintervalos.
3. Utilice un redondeo de 4 decimales.
4. Calcule el error utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\,dx$$

1. Aproxime el valor de la integral utilizando el método del trapecio para $n = 4$ subintervalos.
2. Utilice un redondeo de 6 decimales.
3. Calcule el error utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

4. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo?

Ejemplo 3

En el monitoreo de redes de datos, es fundamental conocer la cantidad de información transferida en un intervalo de tiempo para optimizar recursos, prevenir saturación y calcular costos asociados al ancho de banda. El tráfico de datos no suele ser constante durante el día; varía según la cantidad de usuarios, procesos programados o picos de uso en horarios laborales.

La cantidad total de datos transferidos se puede modelar como la siguiente integral:

$$D = \int_{t_0}^{t_f} B\,(t)\,dt$$

Donde:

- D = Cantidad de datos transferidos (Megabits)
- B(t) = Ancho de banda utilizado (Mbps)
- t = Tiempo (en horas)

Un ingeniero de sistemas está realizando un estudio de monitoreo de red en la infraestructura tecnológica de un centro de datos de la Universidad del Rio Grande. Como parte de la gestión de la red, ha recolectado datos del ancho de banda utilizado por uno de los servidores principales durante las primeras 5 horas de operación del día.

Estas mediciones fueron obtenidas a través de las herramientas de monitoreo de red que registran el ancho de banda promedio consumido en intervalos de una hora.

https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7

Tabla 8

Variación del ancho de banda a lo largo del tiempo

Tiempo (h)	Ancho de Banda (Mbps)
0	40
1	50
2	70
3	100
4	90
5	60

1. Analice el problema presentado y proponga un título técnico adecuado que refleje claramente su contexto, propósito y el área de conocimiento al que pertenece.
2. Desarrolle la solución de este problema siguiendo la estructura:
- Contextualización del Problema.
- Descripción y modelamiento del problema.
- Pregunta problema
3. Estime mediante la regla del trapecio la cantidad total de datos transferidos en Megabits durante las primeras 5 horas.
4. Si el costo de transferencia es de aproximadamente $0.10 USD por Gigabyte transferido, ¿cuál sería el valor a pagar por la transferencia total registrada?

Ejemplo 4

La Universidad Tecnológica del Caribe (UTC), a través del Grupo de Investigación en Ciencia de Datos y Analítica Predictiva (GICDAP), se encuentra desarrollando un proyecto para la implementación de modelos de inteligencia artificial (IA) orientados a predecir la deserción universitaria. Esta iniciativa busca fortalecer las estrategias institucionales de permanencia y graduación, mediante el uso de herramientas tecnológicas que permitan anticipar comportamientos de abandono y tomar decisiones fundamentadas con base en datos.

Como parte del proceso investigativo, el equipo ha diseñado y entrenado dos modelos diferentes para predecir la deserción:

•Modelo 1: Regresión Logística (modelo clásico, ampliamente utilizado por su simplicidad y capacidad de interpretación).

•Modelo 2: Random Forest (modelo robusto, reconocido por su alta capacidad predictiva y manejo de datos no lineales).

Ambos modelos han sido evaluados en función del F1-Score acumulado (%) conforme se incrementa progresivamente la cantidad de datos de entrenamiento.

Esta métrica ha sido seleccionada por el equipo debido a que ofrece una evaluación más equilibrada y robusta en comparación con la precisión simple, ya que considera tanto la capacidad del modelo para evitar falsos positivos como para identificar correctamente los casos positivos. Esto es esencial en contextos de clasificación binaria como la predicción de deserción.

Sin embargo, los datos disponibles presentan intervalos irregulares en el crecimiento de la muestra, lo que exige aplicar métodos matemáticos o soluciones computacionales para estimar el rendimiento acumulado total de cada modelo. A partir de estos resultados, la universidad espera definir cuál de las dos estrategias debe adoptar para su sistema institucional de monitoreo y prevención de la deserción.

Tabla 9

Regresión Logística

Datos (x1000)	F1-Score (%)
0	0
0.5	55
1	65
1.5	68
2	70
2.5	71
3	72
4	74
5	75
6	75.5
7	76

Tabla 10

Random Forest

Datos (x1000)	F1-Score (%)
0	0
0.5	60
1	61

Datos (x1000)	F1-Score (%)
1.5	72
2	74
2.5	74
3	78
4	73
5	70
6	81
7	82

El grupo completo se dividirá en dos subgrupos de trabajo, cada uno responsable de analizar un modelo específico. El trabajo debe desarrollarse de manera cooperativa bajo la siguiente estructura:

- Subgrupo 1: Analizará el modelo de Regresión Logística.
- Subgrupo 2: Analizará el modelo Random Forest.

Cada subgrupo desarrollará de forma independiente las siguientes actividades:

1. Analizar el problema y proponer un título técnico adecuado que refleje su contexto y su relación con la evaluación de modelos de clasificación.

2. Desarrollar la solución del problema siguiendo esta estructura:

    - Contextualización del problema.
    - Descripción y modelamiento matemático que justifique el uso del método asignado.
    - Formulación de una pregunta problema clara y técnica.

3. Aplicar correctamente el método de integración asignado (Regla del Trapecio) sobre los datos tabulados para estimar el área bajo la curva acumulada del F1-Score.

4. Explicar las características del modelo de clasificación asignado:

    - Subgrupo 1: Debe explicar el funcionamiento y las principales características del modelo de Regresión Logística, destacando sus ventajas, limitaciones y aplicaciones típicas.

- Subgrupo 2: Debe explicar el funcionamiento y las principales características del modelo Random Forest, resaltando su capacidad para manejar datos no lineales, su robustez y sus ventajas frente a otros métodos.

5. Reflexionar y responder: ¿Cómo contribuyen los sistemas de predicción basados en inteligencia artificial al desarrollo de soluciones para la optimización de procesos educativos y la reducción de la deserción? Fundamente su respuesta considerando los impactos en la eficiencia académica, económica e institucional.

6. Comparar las áreas aproximadas calculadas para cada modelo. Si la diferencia entre los resultados es menor al 10% del promedio de ambas áreas, el grupo deberá seleccionar como modelo de clasificación aquel que demande menores recursos computacionales. Esta elección debe ser argumentada técnicamente, teniendo en cuenta la eficiencia, simplicidad y facilidad de interpretación del modelo.

7. Explicar de forma conjunta qué es el F1-Score y qué ventajas proporciona para medir el rendimiento global de modelos de clasificación binaria en problemas como la predicción de deserción. ¿Qué representa gráficamente? Justificar por qué esta métrica es adecuada para la comparación de los modelos presentados.

8. Presentar de forma consensuada el modelo seleccionado, argumentando la elección con base en el mejor F1-Score acumulado o en el rendimiento computacional del modelo. La decisión debe ser respaldada con evidencia numérica, técnica y referencias académicas pertinentes.

ISBN: 978-628-97230-0-7

https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7.ch02

Cómo citar: Tamayo Benjumea, C. A., Calderón Acosta, J. G., Badillo Durán, L., & Coronel Casadiego, J. J. (2025). Regla del Trapecio. In (Ed.), *Integración numérica con aprendizaje basado en problemas: teoría, ejercicios y aplicaciones en ingeniería* (pp. 55-79). Editorial PLAGCIS. https://doi.org/10.62486/978-628-97230-0-7.ch02